

## СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ “НЕИДЕАЛЬНОМ” ОПЕРАТОРЕ В КОНТУРЕ УПРАВЛЕНИЯ

*Аннотация:* Предложен алгоритм компенсированного оптимального управления динамическими системами с транспортным запаздыванием, основанный на методике Бэсса.

*Ключевые слова:* алгоритмы оптимального управления, динамические системы, методике Бэсса.

### Введение

В настоящее время тренажеры являются одним из наиболее эффективных средств для подготовки операторов систем управления сложными технологическими процессами. Для их эффективного функционирования необходимо наличие оптимального в смысле некоторого критерия качества закона управления, реализующего эталонный режим работы системы. Синтез оптимальной динамической реализации при условии отсутствия запаздывающего эффекта в контуре управления был произведен в [1].

Пусть объект управления описывается линейной стационарной системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad (1)$$

где  $\bar{x}$  –  $n$ -мерный вектор состояния объекта,  $\bar{u}$  –  $n$ -мерный вектор управления,  $A$ ,  $B$  – матрицы постоянных коэффициентов размерности  $n * n$ ,  $n * m$ .

Если в контуре управления объектом (1) находится идеальный оператор, передаточная функция которого  $W_M \equiv 1$ , то для синтеза систем, оптимальных по расходу топлива и быстрдействию в смысле критерия

$$I = \int_0^T [k + |u(t)|] dt, \quad (2)$$

где  $T$  не задано,  $0 \leq k < \infty$ ,  $|u|$  – расход топлива на управление в единицу времени, можно использовать результаты, полученные в работе [2].

Однако в работе оператора зачастую сказывается запаздывающий эффект. Последний может возникнуть либо при передаче управляющих сигналов на значительные расстояния (например, управление “Луноходом”), либо “неидеальностью” оператора, когда математическая модель последнего имеет вид

$$W_M = ke^{-\theta p} \text{ или } W_M = k \frac{e^{-\theta p}}{T_p + 1}.$$

### Постановка задачи

Математическую модель системы с оператором в контуре управления можно представить в виде

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t - \theta). \quad (3)$$

Для такой системы использовать алгоритмы оптимизации, описанные в [2], не удастся, так как наличие запаздывания приводит к незатухающим автоколебаниям, которые на фазовой плоскости соответствуют предельный цикл. Поэтому при синтезе такого рода систем необходимо учитывать запаздывание.

Для однозначного определения траектории  $\bar{x}(t)$  уравнение (3) на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_k$  необходимо задать не только допустимое управление  $\bar{u}(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_k$ , но и начальную вектор-функцию  $\bar{\mu}(t)$  управления  $\bar{u}(t)$ , определенную на соответствующих отрезках  $t_0 - \theta \leq t \leq t_0$  для каждой составляющей вектора управления. Начальная функция  $\bar{\mu}(t)$  является непрерывной на отрезках  $t_0 - \theta \leq t \leq t_0$ .

В этом случае задача оптимального управления заключается в отыскании такого допустимого управляющего воздействия  $\bar{u}^*(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_k$ , чтобы соответствующая этому управлению и начальной вектор-функции  $\bar{\mu}(t)$ ,  $t_0 - \theta \leq t \leq t_0$ , траектория  $\bar{x}^*(t)$  системы (3) удовлетворяла заданным граничным условиям, и при этом минимизировался функционал (2).

### Синтез оптимальных законов движения

Легко показать, что сопряженные уравнения для вспомогательной вектор-функции  $\bar{\psi}(t)$  в данном случае не отличаются от соответствующих уравнений подобной системы без запаздывания. Следовательно, оптимальные по расходу топлива управления системой (3), будучи кусочно-постоянными, и условия относительно величины гамильтониана  $H$  вдоль оптимальной траектории  $\bar{x}^*(t)$ , сформулированные в [2], остаются неизменными.

Поскольку составляющие управления  $\bar{u}(t - \theta)$  из класса допустимых при сдвиге по оси времени на отрезке  $\theta$  также остаются допустимыми, то синтез таких систем предлагается проводить в два этапа.

На первом этапе синтезируется оптимальный алгоритм управления подобной системой без запаздывания, на втором этапе осуществляется синтез компенсированной оптимальной системы. Следует отметить, что задача оптимального управления системой (3) на отрезках времени  $l_k - \theta \leq t \leq l_k$  имеет неоднозначное решение в том смысле, что на этих интервалах значение составляющих  $u_k(t)$  ( $k = \bar{1}, r$ ) управляющего воздействия  $\bar{u}(t)$  могут быть любыми, и не скажутся на конечном состоянии системы в момент  $t = t_k$ .

Требованием к установившемуся движению системы, при котором система после окончания переходного процесса сколь угодно долго должна находиться в заданном конечном состоянии, однозначно устанавливается управление на указанном интервале.

Для компенсации запаздывания предлагается модифицированная методика Р. Бэсса [3], суть которой заключается в следующем.

Пусть уравнение оптимальной (по произвольному критерию) поверхности переключения при отсутствии запаздывания в системе известно и имеет вид

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \bar{x} \subset X^n. \quad (4)$$

Считая, что функция  $\Phi$  разрешима относительно одного из  $n$  своих аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , например,  $x_1$ , запишем (4) в виде

$$x_1 + \phi(x_2, x_3, \dots, x_n) = 0; \bar{x} \subset X^n. \quad (5)$$

Следует отметить, что условие разрешимости не обязательно и берется для наглядности.

Поверхность переключения (5) показана на рис.1, где  $ABC$  – некоторая оптимальная траектория вынужденного движения системы до поверхности переключения (5).

Пусть для простоты в контуре управления скалярное управляющее воздействие с запаздыванием 0. Для того чтобы траектория  $ABC$  в этом случае осталась, как и в системе без запаздывания, необходимо, очевидно, чтобы оптимальная поверхность представляла собой геометрическое место точек, из которых через время  $\theta$  при вынужденном движении системы изображающая точка переходит на поверхность (5).

Уравнение оптимальной поверхности переключения компенсированной системы в этом случае имеет вид

$$\Phi^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \bar{x} \subset X^n$$

или

$$x_1 + \phi^*(x_2, x_3, \dots, x_n) = 0, \bar{x} \subset X^n.$$

Обозначим расстояние между проекциями точек  $B$  и  $C$  на осях  $x_1 \dots x_n$  через  $\Delta_{x_1} \dots \Delta_{x_n}$  соответственно. Очевидно, что  $\Delta_{x_i}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) являются функциями времени запаздывания  $\theta$ , а величины  $x_i = x_i + \Delta_{x_i}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – текущие значения координат, представляющие значения координат системы через время запаздывания  $\theta$ .

Из геометрических соображений имеем

$$x_1 + \varphi^*(x_2, \dots, x_n, \theta) = \Delta_{x_1} - \varphi(x_2 + \Delta_{x_2}, \dots, x_n + \Delta_{x_n}) \quad (6)$$

или

$$\Phi^*(x_1, \dots, x_n) = \Phi(x_1 + \Delta_{x_1}, \dots, x_n + \Delta_{x_n}).$$

Уравнение (6) является общим уравнением для определения функции  $\Phi^*$  по заданной функции  $\Phi$ . Для этого, согласно методике Бэсса, достаточно определить величины  $\Delta x_i(\theta)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), а затем подставить будущие значения координат системы  $x_i + \Delta x_i$  в уравнение поверхности переключения системы без запаздывания.

Однако определение этих величин существенно связано интервалом времени между двумя последовательными переключениями управления  $\Delta t_{пер}$ , что является специфическим для рассматриваемого класса задач и отсутствует в методике Бэсса [3], носящей общий характер.

Для определения этих величин запишем общее решение для координат вектора  $\bar{x}$  в “обратном” времени  $z = t_k - t$

$$x_i(z) = f_i(\bar{x}^0, u, z); \bar{x}^0 = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)), \quad (7)$$

где  $u$  – управляющее воздействие, равное  $\pm 1$  или  $0$ ;  $\bar{x}^0$  – вектор начальных значений соответствующих координат, лежащих на оптимальной поверхности переключения системы без запаздывания.

В случае  $\Delta z_n < \theta$  для получения будущих значений  $i$ -той координаты достаточно в управлении (7) при найденном значении оптимального управления, соответствующем траектории  $CBA$  (рис.4.5), положить  $z = \theta$   $\bar{x}_i = x_i + \Delta x_i = f_i(x_1, \dots, u, z)$  и найденные  $\bar{x}_i$  подставить в уравнение (6).

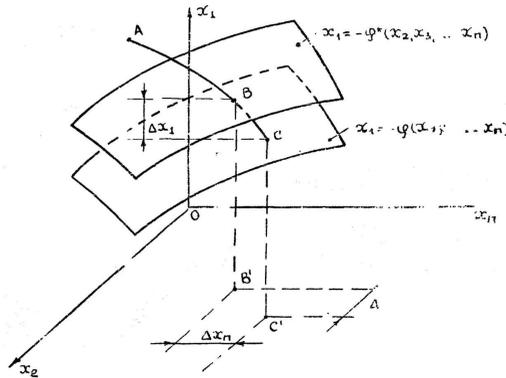


Рис. 1 – Геометрическая интерпретация метода Бэсса

В случае  $\Delta z_n \geq \theta$  для получения будущих значений  $i$ -той координаты необходимо в уравнении (7) положить  $z = \theta - z_n$ , подразумевая под  $x_i^0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) начальные значения соответствующих координат, лежащих на новой оптимальной поверхности переключения, следующей непосредственно за исходной поверхностью, а под  $U$  – новое значение управления, соответствующее вынужденному оптимальному движению после новой поверхности переключения, и найденные  $\bar{x}_i$  подставить в уравнение (6).

### **Заключение**

Таким образом, в статье предложен алгоритм компенсированного оптимального управления динамическими системами с транспортным запаздыванием, основанный на методике Бэсса.

### **Литература**

1. Пасько В.П., Стенин А.А., Хоменко П.С. Синтез оптимальных законов движения линейных стационарных моделей технологических процессов при “идеальном” операторе в контуре управления // Адаптивні системи автоматичного управління. – Випуск 15 (35). – Київ, 2009. – С. 71–76.
2. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление, “Машиностроение” М., 1968, 764 с.
3. Bass R.W. Improved on-off Missile Stabilization // Jet Propulsion. – Vol.26. – 1956. – P415-417.

Отримано 07.12.2010 р.