УДК 519.24

О.А. Павлов, М.М. Головченко, М.М. Ревич

МЕТОД ОЦІНКИ КОЕФІЦІЄНТІВ ПРИ ЛІНІЙНИХ ЧЛЕНАХ БАГАТОВИМІРНОЇ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ РЕГРЕСІЇ, ЗАДАНОЇ НАДЛИШКОВИМ ОПИСОМ

Анотація: В роботі проведене розв'язання однієї задачі, що виникає при вирішенні проблеми оцінки коефіцієнтів членів багатовимірної поліноміальної регресії (БПР), заданої надлишковим описом за результатами умовного активного експерименту. В роботах проф. Павлова О. А. та його учнів ефективно вирішена проблема оцінки коефіцієнтів при нелінійних членах БПР з заданою малою дисперсією помилки (при умові точного розв'язання відповідних невироджених систем лінійних рівнянь). В цьому випадку гарантовано з надлишкового опису виключаються зайві нелінійні члени БПР. Задача, яка розв'язується у цій роботі, полягає у знаходженні обґрунтованого метода визначення зайвих лінійних членів БПР, заданої надлишковим описом, при використанні загального методу найменших квадратів (МНК) при умові відомої (можливо, з точністю до невідомих числових значень її параметрів) функції щільності випадкової величини, що адитивно накладається на результати вимірювань вихідної змінної.

Ключові слова: Метод найменших квадратів, багатовимірна поліноміальна регресія, алгоритм кластерного аналізу.

Вступ

В багатьох інформаційних експертних системах чи в інформаційних системах класифікації використовуються багатовимірні лінійні чи нелінійні регресії, коефіцієнти яких при змінних знаходяться методом найменших квадратів [1–8]. В роботах [9–11] була сформульована наступна проблема.

БПР задається наступним надлишковим описом:

$$Y(\bar{x}) = \sum b_{i_1 \dots i_t}^{j_1 \dots j_t} (x_{i_1})^{j_1} \cdot (x_{i_2})^{j_2} \cdot \dots \cdot (x_{i_t})^{j_t} + E \tag{1}$$
$$\forall (i_1 \dots i_t) \in K, \forall (j_1 \dots j_t) \in K(i_1 \dots i_t),$$

де $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ – детермінований вектор вхідних змінних, E – випадкова величина, що має довільний розподіл; $\mu E = 0$, $DE = 8^2 < \infty$, відома величина дисперсії чи її верхня оцінка.

При цьому може бути реалізований наступний активний експеримент: на вхід можуть подаватися довільні значення вхідної змінної x_j в діапазоні $[x_{j_{min}}, x_{j_{max}}]$, $j = \overline{1, m}$, та виконується умова:

$$\cap_{j=1}^{n} [x_{j_{min}}, x_{j_{max}}] = [a, b] \neq \{ \emptyset \}. \tag{2}$$

Необхідно за результатами активного експерименту оцінити коефіцієнти всіх членів БПР та виключити з її надлишкового опису всі зайві члени. В [9–11] показано, що при довільному надлишковому описі (1) задача оцінки коефіцієнтів при нелінійних членах БПР з достатньою точністю, що гарантує виключення з надлишкового опису зайвих членів, може завжди алгоритмічно бути зведена до оцінки коефіцієнтів при нелінійних членах одновимірних поліноміальних регресій з заздалегідь заданою малою величиною їх дисперсій та розв’язання відповідних гарантовано невироджених систем лінійних рівнянь, змінними яких і є оцінки коефіцієнтів при нелінійних членах надлишкового опису БПР (1).

Розв’язання задачі базується на використанні нормованих ортогональних поліномів Форсайта. Задачу оцінювання коефіцієнтів при лінійних членах надлишкового опису (1) БПР та виключення зайвих лінійних членів пропонувалось розв’язувати відомими методами багатовимірного лінійного регресійного аналізу.

Найбільш поширеними методами вибору найкращого рівняння лінійної регресії є методи, що використовують критерії [4]:

– сума квадратів залишків;
– коефіцієнт детермінації R^2;
– скорегований коефіцієнт детермінації $\bar{R}_p^2$;
– Cp-статистика Малоуза;
– методи t-впорядкованого пошуку;
– метод виключення та покрокової регресії.

Жоден з перерахованих методів не має гарантованої переваги над іншими, тому на практиці використовують приведені вище критерії, різні методи, а остаточний вибір здійснюють, виходячи з техніко-економічних міркувань чи залишають цю проблему на розв’язання експертам. Тому, проблему вибору найкращого рівняння лінійної регресії не можна вважати остаточно вирішеною.

В роботі наводиться метод обґрунтованого розв’язання цієї задачі, навіть при достатньо невеликій кількості експериментів $(n \geq 20)$, для яких є необов’язковим виконання умови (3), але функція щільності випадкової величини E повинна бути відомою хоча б з точністю до числових значень її параметрів.

Відмінність запропонованого метода від інших полягає в наступному:

– при переборі можливих варіантів регресії практично знімається обмеження на кількість змінних;

– найкращий варіант регресії включає використання одночасно двох критеріїв залишкової суми квадратів (ЗСК) та критерію χ^2.

Метод оцінки коефіцієнтів при лінійних членах багатовимірної поліноміальної регресії, заданої надлишковим описом

1. Модель БПР, заданої надлишковим описом (1), приведемо у вигляді:

$$Y(\bar{x}) = b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j x_j + f(\bar{x}) + E, \tag{3}$$

де $f(\bar{x}) = \sum \hat{b}_{i_1 \dots i_t}^{j_1 \dots j_t} (x_{i_1})^{j_1} \cdot (x_{i_2})^{j_2} \cdot \dots \cdot (x_{i_t})^{j_t}, \quad \forall (i_1 \dots i_t) \in K, \quad \forall (j_1 \dots j_t) \in K(i_1 \dots i_t),$

причому оцінки всіх ненульових коефіцієнтів при нелінійних членах БПР відомі практично точно (зайві нелінійні члени надлишкового опису вже виключені).

Примітка. Для спрощення вважаємо, що надлишковий опис містить всі можливі лінійні члени.

Ефективність запропонованого нижче метода суттєво залежить від виконання наступних умов:

– В активному експерименті детерміновані вхідні змінні незалежно одна від одної можуть приймати значення:

$$\forall x_i = 0 \vee 1; \tag{4}$$

– кількість змінних достатньо велика, тобто така, що перебір всіх можливих регресій був практично не бажаним;

– кількість випробувань $n \geq 20$. Тоді в якості другого критерія можна використовувати розподіл χ^2, звідки m – кількість вхідних змінних – повинна бути не менше п'яти, і в випадку $m = 5$ процедуру розбиття множини всіх членів лінійної регресії на два класи можна опустити. Якщо кількість змінних менше п'яти, то задача оцінки коефіцієнтів $b_i, i = \overline{0, m}$, розв'язується загальним МНК за можливими значеннями вхідних змінних таких, що матриця $(A^T A)^{-1}$ є добре обумовленою (див. нижче (7));

– аналітичний вираз розподілу випадкової величини E заданий принаймні з точністю до невідомих числових значень його параметрів.

Якщо виконується (4), нелінійні члени БПР (1) приймають значення:

$$\forall \hat{b}_{i_1 \dots i_t}^{j_1 \dots j_t} (x_{i_1})^{j_1} \dots (x_{i_t})^{j_t} = \hat{b}_{i_1 \dots i_t}^{j_1 \dots j_t} \vee 0 \tag{5}$$

За стандартною схемою МНК реалізуємо активний експеримент $\bar{x}_i(x_{1i}, x_{2i} \dots, x_{mi}), i = \overline{1, n}$, де значення вхідних змінних гарантує невиродженість матриці $A^T A$, де

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} \cdots & x_{m1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

а вектор оцінок

$$\hat{b} = (A^T A)^{-1} A^T \begin{pmatrix} y_1 - f(\overline{x_1}) \\ y_2 - f(\overline{x_2}) \\ \dots \\ y_n - f(\overline{x_n}) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де $y_i, i = \overline{1, n}$, – значення вихідної змінної $Y(\bar{x})$ в i-му експерименті, коли на вхід подається детермінований вектор $\bar{x}_i$. Тобто,

$$y_i = b_0 + \sum_{i=1}^{m} b_j x_{ji} + f(\overline{x_i}) + E_i, \; i = \overline{1, n}, \tag{8}$$

E_i – реалізація випадкової величини E.

2. Алгоритм розбиття чисел $\hat{b}_j, \; j = \overline{0, m}$, на два класи M_1 та M_2.

Нехай $I = \{|\hat{b}_j|, \; j = \overline{0, m}\}$, де $\hat{b}_j, \; j = \overline{0, m}$, – оцінки регресії (8). Елементи множини I впорядкуємо наступним чином

$$\left|\hat{b}_{j_1}\right| \geq \left|\hat{b}_{j_2}\right| \geq \left|\hat{b}_{j_{m+1}}\right|, \tag{9}$$

де j_1 – індекс числа $\hat{b}_j$, у якого найбільше значення модуля.

Аналогічно визначаються індекси j_e, $e = \overline{2, m+1}$.

Крок 1:

$$\hat{b}_{j_1} \in M_1,\ \hat{b}_{j_{m+1}} \in M_2, \tag{10}$$

Якщо

$$\hat{b}_{j_1} - \hat{b}_{j_2} < \hat{b}_{j_2} - \hat{b}_{j_{m+1}}, \tag{11}$$

то

$$\hat{b}_{j_2} \in M_1, \tag{12}$$

в протилежному випадку $\hat{b}_{j_2} \in M$, та побудова множин M_1 та M_2 завершена.

Множині M_2 належить $\hat{b}_{j_e}$, $e = \overline{2, m+1}$.

Крок 2: нехай

$$\hat{b}_{j_2} \in M_1. \tag{13}$$

Якщо

$$\hat{b}_{j_3} - \hat{b}_{j_{m+1}} < \frac{1}{2}\left(\hat{b}_{j_1} + \hat{b}_{j_2}\right), \text{ то } \hat{b}_{j_3} \in M_2, \tag{14}$$

побудова множин M_1 та M_2 завершена:

$$M_1 = \left\{\hat{b}_{j_1}, \hat{b}_{j_2}\right\}, M_2 = \left\{\hat{b}_{j_3}, \dots\ \hat{b}_{j_{m+1}}\right\}, \tag{15}$$

в протилежному випадку $\hat{b}_{j_3} \in M_1$.

Крок e: нехай $\hat{b}_{j_e} \in M_1$, тоді

$$\hat{b}_{je+1} - \hat{b}_{j_{m+1}} < \frac{1}{e}\left(\hat{b}_{j_1} + \hat{b}_{j_2} + \cdots \hat{b}_{je}\ \right), \tag{16}$$

тоді $\hat{b}_{j_{e+1}} \in M_2$, та побудова множин M_1 та M_2 завершена:

$$M_1 = \{\hat{b}_{j_1}, \dots\ \hat{b}_{j_e}\}, M_2 = \{\hat{b}_{j_{e+1}}, \dots\ \hat{b}_{j_{m+1}}\}. \tag{17}$$

В протилежному випадку $\hat{b}_{j_{e+1}} \in M_1$.

Зрозуміло, що кількість кроків алгоритму обмежена, і він завершується остаточним розбиттям множини оцінок коефіцієнтів $\{\hat{b}_j,\ j = \overline{0, m}\}$ на два класи M_1 та M_2.

3. Агрегований алгоритм знаходження структури ЛПР (з оцінкою невідомих коефіцієнтів) заданої надлишковим описом.

Множину M_2 представлено в вигляді:

$$M_2 = \cup_j M_2^j,\ j = \overline{1,\ \textstyle\sum_{t=1}^{|M_2|} C^t{}_{|M_2|}}, \tag{18}$$

де $|M_2|$ – число елементів в множині M_2.

$$\forall_{e_1 \neq e_2} M_2^{e_1} \neq M_2^{e_2}. \tag{19}$$

По кожній множині M_2^j задаємо лінійну частину БПР

$$\textstyle\sum_{\forall\, b_e \in M_2^j} (b_e \cdot x_e) \vee b_0. \tag{20}$$

Примітка. Якщо e-тий елемент множини M_2^j є коефіцієнт b_0, то відповідний член суми дорівнює b_0.

Для кожної j-тої БПР ($j = \overline{1,\ \sum_{t=1}^{|M_2|} C_{|M_2|}^t}$):

$$Y(\bar{x}) = \sum_{\forall \hat{b}_e \in M_1} (b_e \cdot x_e) \vee b_0 + \sum_{\forall \hat{b}_e \in M_2^j} (b_e \cdot x_e) \vee b_0 + f(\bar{x}) + E. \qquad (21)$$

За результатом активного експерименту ($\bar{x}_i \to \bar{y}_i$) загальним МНК отримуємо відповідні нові оцінки $\forall \hat{b}_e \in M_1;\ \hat{b}_e \in M_2^j$.

Примітка. Вважається, що обчислюванні ресурси і обмеження по часу дозволяють оцінити коефіцієнти $\sum_{t=1}^{|M_2|} C_{|M_2|}^t$ різних лінійних регресій, за результатами експерименту оцінюємо коефіцієнти при її лінійних членах.

Знаходимо залишкову суму квадратів (ЗСК) $\forall M_2^j$:

$$\text{ЗСК}(M_2^j) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \sum_{\forall \hat{b}_e \in M_1} \left(\hat{b}_e \cdot x_{ei} \right) \vee \hat{b}_0 - \sum_{\forall \hat{b}_e \in M_2^j} \left(\hat{b}_e \cdot x_{ei} \right) \vee \hat{b}_0 - f(\bar{x_i}) \right]^2 \qquad (22)$$

Знаходимо числа

$$f_i^j = y_i - \sum_{\forall \hat{b}_e \in M_1} \left(\hat{b}_e \cdot x_e \right) \vee \hat{b}_0 - \sum_{\forall \hat{b}_e \in M_2^j} \left(\hat{b}_e \cdot x_e \right) \vee \hat{b}_0 - f(\bar{x_i}),\ i = \overline{1,n}. \qquad (23)$$

Критерієм $\hat{\chi}^2$ перевіряємо гіпотезу про те, що числа $f_i^j, i = \overline{1,n}$, є реалізаціями випадкової величини E, розподіл якої нам відомий (проста гіпотеза) чи відомий з точністю до невідомих значень числових параметрів (складна гіпотеза).

Реалізацію критерію χ^2, отриману за числами $f_i^j,\ i = \overline{1,n}$, позначаємо $\hat{\chi}^2(M_2^j)$.

Знаходимо всі пари чисел $\text{ЗСК}(M_2^j), \hat{\chi}^2(M_2^j)$ для всіх $j = \overline{1, \sum_{t=1}^{|M_2|} C_{|M_2|}^t}$.

За таблицею для розподілу χ^2 з відповідною кількістю ступенів свобод (залежить від того, яка гіпотеза перевіряється – проста чи складна) знаходимо два числа χ_1^2 та χ_2^2, що задовольняють умовам:

$$P(\text{критерій } \chi^2 \geq \chi_1^2) = q_1; \qquad (24)$$

$$P(\text{критерій } \chi^2 \geq \chi_2^2) = q_2. \qquad (25)$$

Примітка 1. Для кожного критерію $\chi^2(M_2^j)$ перевіряється той самий розподіл χ^2, який висунула проста чи складна гіпотеза.

Примітка 2. Числа q_1 та q_2 задаються експертами. Як приклад, можна взяти $q_1 = 0.05$, $q_2 = 0.3$.

Позначимо:

$$\arg \min_{j = \overline{1, \sum_{t=1}^{|M_2|} C_{|M_2|}^t}} \text{ЗСК}(M_2^j) = M_2^{j_1} \qquad (26)$$

$$\min_{j = \overline{1, \sum_{t=1}^{|M_2|} C_{|M_2|}^t}} \hat{\chi}^2(M_2^j) = \hat{\chi}^2 M_2^{j_2} \qquad (27)$$

$$\arg\min \text{ЗСК}(M_2^j) = M_2^{j_3} \qquad (28)$$

$$\forall j, \text{ для яких } \hat{\chi}^2(M_2^j) \leq \hat{\chi}^2(M_2^{j_2}) + \Delta_1 < \chi_2^2 \qquad (29)$$

 ISSN 1560-8956

$$\hat{\chi}^2\left(M_2^{j_2}\right) < \chi_2^2, \text{ чи} \tag{30}$$

$$\forall j, \text{ для яких } \hat{\chi}^2\left(M_2^{j}\right) \le \hat{\chi}^2\left(M_2^{j_2}\right) + \Delta_2 < \chi_1^2 \tag{31}$$

$$\hat{\chi}^2\left(M_2^{j_2}\right) \ge \chi_2^2. \tag{32}$$

Примітка. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ – експертні числа.

Наприклад, для q_1 = 0.05, q_2 = 0.3 можна покласти

$$P\left(\chi^2 \ge \hat{\chi}^2\left(M_2^{j_2}\right) + \Delta_1\right) = 0.4 \tag{33}$$

$$P\left(\chi^2 \ge \hat{\chi}^2\left(M_2^{j_2}\right) + \Delta_2\right) = 0.2 \tag{34}$$

4. Отримання та аналіз остаточного розв’язку.

1) Нехай $M_2^{j_2} = M_2^{j_3}$ при виконанні умов (29)–(30), і множині $M_2^{j_2}$ відповідає

$$\min_{j=\overline{1,\sum_{t=1}^{|M_2|} C_{|M_2|}^t}} \text{ЗСК}\left(M_2^j\right). \tag{35}$$

Тоді лінійна частина БПР задається множиною $M_2^{j_2}$ з відповідними оцінками для всіх $\hat{b}_e \in M_1$, для всіх $\hat{b}_e \in M_2^{j_2}$. Отриманий розв’язок має високий рівень достовірності.

2) $M_2^{j_3} \ne M_2^{j_2}$, але виконуються умови (29)–(30). Тоді розв’язок $M_2^{j_3}$ відповідними оцінками для всіх $\hat{b}_e \in M_1$, для всіх $\hat{b}_e \in M_2^{j_3}$ має достатній ступінь достовірності.

Примітка. Множини (26), (27), (28) при виконанні обмежень (29)–(30) можуть містити більше, ніж один розв’язок, тобто замість $M_2^{j_1}, M_2^{j_2}, M_2^{j_3}$ маємо множини $\{M_2^j\}^{j_1}, \{M_2^j\}^{j_2}, \{M_2^j\}^{j_3}$. Тоді в якості першого розв’язку, що задовольняє умові 1), беремо $M_2^j \in \{M_2^j\}^{j_1}$, що містить мінімальну кількість членів лінійної регресії. В якості другого розв’язку беремо множину $M_2^j \in \{M_2^j\}^{j_3}$, що містить мінімальну кількість членів лінійної регресії. Для достовірного аналізу отриманого результату в якості потенційних розв’язків пропонується розглянути всі розв’язки з множин $\{M_2^j\}^{j_1}$ та $\{M_2^j\}^{j_3}$. Можна також додатково розглянути розв’язки, на яких при виконанні умов (29)–(30) значення ЗСК відрізняється від величини (14) не більше, ніж на задане значення.

3) Для $M_2^{j_3}$ виконуються умови (31)–(32). Отриманий результат має низьку ступінь достовірності. Рекомендація: провести додаткову кількість випробувань і знову розв’язати задачу для отримання результату, що задовольняє умові 1) чи 2).

4) Нехай виконується умова $q_1 \le P\left(\chi^2 > \chi^2\left(M_2^{j_2}\right)\right) \le q_4$. В цьому випадку розв’язок M_2^{j2} має мінімально можливу ступінь достовірності.

Рекомендації. Провести додаткові випробовування і повторно розв’язати задачу або використати інший метод, якщо для нового розв’язку не виконалась умова 1) чи 2).

Примітка. Рекомендація по вибору метода наведена нижче.

5) $\chi^2(M_2^{j2}) \ge \chi_1^2$. Розв’язок не отримано. Якщо дозволяють обчислювальні ресурси, повторити алгоритм для всіх множин M_j, де

$$= \{b_0, b_1, \dots, b_m\}.$$

$$= \bigcup_j \quad _j,\ j = \overline{1, \sum_{t=1}^{m+1} C_{m+1}^t}$$

$$\forall i \neq j, \quad _i \neq \quad _j.$$

Якщо це неможливо, розв’язати задачу методом покрокової регресії. З усіх можливих методів, що не вимагають перебору всіх можливих регресій в [4], він рекомендується як найбільш ефективний.

Примітка 1. Використання критерія χ^2 разом з критерієм мінімізації ЗСК на якісному рівні є аналогом послідовності даних, які не використовуються в методі найменших квадратів і за якими перевіряються властивості потенційного розв’язку методом групового урахування аргументів.

Примітка 2. Запропонований метод множин використовувати для оцінки коефіцієнтів звичайної багатовимірної лінійної регресії, заданої надлишковим описом.

Прискорений варіант алгоритму

Будується лише одна регресія з використанням множини M_1. Якщо $\min \forall |b_e| > 0$ суттєво відрізняється від нуля, прискорений алгоритм швидко й ефективно розв’язує задачу довільної розмірності. Розв’язок приймається, якщо реалізації критерія χ^2 задовольняє нерівності (29).

Висновки

1. При умові, що відомий розподіл адитивної помилки вимірювання з точністю до невідомих числових значень параметрів, запропоновано новий метод оцінки коефіцієнтів багатовимірної поліноміальної регресії, заданої надлишковим описом.

2. Основними властивостями метода, що відрізняє його від відомих, є наступними:

– він фактично є нечутливим до розмірності задачі, хоч і формально відноситься до класу методів, що перебирають всі можливі регресії;

– він використовує одночасно два критерії: залишкову суму квадратів та критерій χ^2, що при виконанні умов 1) чи 2) п. 4 дає високу достовірність отриманого результату;

– отриманий результат задається лінгвістичною змінною, яка приймає значення: висока достовірність, достатня достовірність, низька достовірність, мінімально можлива достовірність та нульова достовірність знаходження всіх членів багатовимірної лінійної регресії з ненульовими коефіцієнтами.

ISSN 1560-8956

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ивахненко А.Г. Моделирование сложных систем. Киев: Вища школа, 1987.

2. Настенко Е., Павлов В., Бойко Г., Носовец О. Многокритериальный алгоритм шаговой регрессии. Біомедична інженерія і технологія, 2020. №3, С.48-53. doi: 10.20535/2617-8974.2020.3.195661

3. Draper N.R., Smith H., Applied Regression Analysis. 3rd edition. New York: John Wiley & Sons, 1998, 736 p.

4. Большаков А.А., Каримов Р.Н. Методы обработки многомерных данных и временных рядов: учебн. пособие для вузов, Москва: Горячая линия-Телеком, 2007. 522 с.

5. Shahrel M.Z., Mutalib S., Abdul-Rahman S. PriceCop-Price Monitor and Prediction Using Linear Regression and LSVM-ABC Methods for E-commerce Platform. International Journal of Information Engineering and Electronic Business (UIEEB), 2021. Vol. 13 (1), pp. 1-14, doi: 10.5815/ijieeb.2021.01.01

6. Satter A., Ibtenaz N. A Regression based Sensor Data Prediction Technique to analyze Data Trustworthiness in Cyber-Physical System. International Journal of Information Engineering and Electronic Business (IJIEEB), 2018. Vol. 10 (3), pp.15-22. Doi: 10.5815/ijieeb.2018.03.03

7. Isabona J., Ojuh D.O. Machine Learning Based on Kernel Function Controlled Gaussian Process Regression Method for In-depth Extrapolative Analysis of Covid-19 Daily Cases Drift Rates. International Journal of Mathematical Sciences and Computing (IJMSC), 2021. Vol. 7 (2), pp. 14-23, doi:10.5815/ijmse.2021.02.02

8. Babatunde G., Emmanuel A.A., Oluwaseun O.R., Buruni O.B., Precious A.E. Impact of Climatic Change on Agricultural Product Yield Using K-Means and Multiple Linear Regressions. International Journal of Education and Management Engineering (IJEME), 2019. Vol.9 (3), pp. 16-26. doi: 10.5815/ijeme.2019.03.02

9. Павлов А.А., Калашник В.В., Коваленко Д.А. Построение многомерной полиномиальной регрессии. Регрессия с повторяющимися аргументами во входных данных. Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». Київ: «ВЕК+», 2015. №62. С. 57-61.

10. Згуровский М.З., Павлов А.А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами. Київ: Наук. думка, 2010. 573 с.

11. Павлов А.А., Калашник В.В. Рекомендации по выбору зоны проведения активного эксперимента для одномерного полиномиального регрессионного анализа. Вісник НТУУ «КПІ», Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». Київ: «ВЕК+», 2014. №60. С.41-45.