УДК 519.854.2

О. Павлов, О. Халус, О. Місюра,
О. Мельников, М. Медведєв

ПДС-АЛГОРИТМИ ДЛЯ ДВОЕТАПНОЇ ЗАДАЧІ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНУВАННЯ В ДЕТЕРМІНОВАНІЙ ПОСТАНОВЦІ ТА В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Анотація: Розглядається двоетапна задача календарного планування, в якій на першому етапі розв’язується задача сумарного запізнення моментів завершення роботи ідентичних незалежних пристроїв відносно спільного директивного строку. Цей оптимальний розв’язок водночас повинен задовольняти наступній умові: різниця між найпізнішим та найбільш раннім строками завершення роботи пристроїв є мінімальною в порівнянні з іншими оптимальними розв’язками. На другому етапі кожен пристрій в момент звільнення починає виконувати послідовно незалежно від інших пристроїв нову множину завдань, кожне з яких має свій директивний строк, за критерієм мінімізації сумарного зваженого запізнення виконання кожного завдання відносно його директивного строку. В даній постановці оптимальним розв’язком сформульованої задачі є той, у якого є оптимальний розв’язок першого етапу, а розв’язок другого етапу є умовно оптимальним (оптимальним відносно отриманих моментів звільнення пристроїв після виконання завдань першого етапу). На розв’язок першого етапу може бути накладена додаткова умова: моменти запуску пристроїв на другому етапі повинні задовольняти наперед заданому лексикографічному порядку. Зрозуміло, що в наведеній постановці кожен пристрій є багатофункціональним. Сформульована вище задача в умовах невизначеності означає, що вектори вагових коефіцієнтів критеріїв для кожного пристрою на другому етапі задані неоднозначно. Неоднозначність може бути пов’язана з тим, що вагові коефіцієнти задаються не одним, а декількома експертами, чи в силу того, що другий етап може бути реалізований в майбутньому, і тому вектор вагових коефіцієнтів вважається випадковим дискретним із заданим розподілом, чи його неоднозначність задається відповідною функцією належності. Автори запропонували ПДС-алгоритми розв’язання цієї задачі в детермінованій постановці та в умовах невизначеності. Тобто, кожен алгоритм містить наближений поліноміальний підалгоритм побудови оптимального розкладу, для якого сформульовані достатні ознаки його оптимальності.

Ключові слова: двоетапна задача календарного планування; ПДС-алгоритм; NP-складні нові задачі; емпірична матриця парних порівнянь, невизначеність.

Вступ

Задачі календарного планування (КП) широко використовуються при математичному плануванні роботи об’єктів з дискретними технологічними процесами [1–4]. Найбільш поширеними є одноетапні задачі КП, які найчастіше використовуються при максимальній агрегації об’єкта моделювання чи є підзадачами багаторівневих математичних моделей [5]. Проте, навіть одноетапні задачі КП в більшості випадків є NP-повними чи NP-складними. М. З. Згуровським, О. А. Павловим, О. Б. Місюрою, О. В. Мельниковим для низки одноетапних задач КП були створені ефективні ПДС-алгоритми їх розв’язання [5]. В спрощеному варіанті ПДС-алгоритм, створений для важкорозв’язуваної задачі комбінаторної оптимізації, обов’язково містить наближений поліноміальний підалгоритм побудови оптимального розв’язку та теоретично обґрунтовані достатні ознаки його оптимальності. В цій роботі автори вперше пропонують ПДС-алгоритми для NP-складної двоетапної задачі КП, детальний якісний опис якої міститься в анотації.

Структура роботи наступна. Другий розділ містить основні теоретичні результати, які були використані при створенні запропонованих ПДС-алгоритмів. Третій розділ містить розв’язок двоетапної задачі КП в детермінованій постановці. Четвертий розділ містить ПДС-алгоритми розв’язання цієї задачі в умовах невизначеності.

1. Основні теоретичні положення

В цьому розділі дається інтегрований опис теоретичних результатів, що використовуються як складові частини ПДС-алгоритмів NP-складної двоетапної задачі КП в детермінованій постановці та в умовах невизначеності.

1.1. Одноетапна задача КП «Мінімізація сумарного зваженого запізнення виконання завдань одним пристроєм»

Розглянемо постановку задачі. Маємо множину незалежних завдань $j,\ j=\overline{1,n}$, для кожного з яких треба виконати одну операцію на одному пристрої за час $l_j > 0,\ j=\overline{1,n}$. Кожному завданню відповідає емпіричний ваговий коефіцієнт $\omega_j > 0$ та директивний строк виконання операції $d_j > 0,\ j=\overline{1,n}$. Операція виконується без переривань. Необхідно побудувати розклад, якому відповідає

$$\min \sum_{j=1}^{n} \omega_j \max\left(0, C_j - d_j\right), \tag{1}$$

де C_j – момент завершення виконання *j*-го завдання.

Задача є NP-складною. Дослідження цієї задачі, проведені М. З. Згуровським, О. А. Павловим, О. Б. Місюрою, О. В. Мельниковим, призвели до створення ефективного ПДС-алгоритму її розв’язання, остання модифікація якого наведена в [5]. Ця задача є всесвітньо відомою, тому наведемо агреговану структуру та основні теоретичні властивості цього алгоритму:

– побудова поліноміальним підалгоритмом початкових розкладів σ^{ord} та σ^{fp} [5], для яких приведені та теоретично обґрунтовані достатні ознаки оптимальності №1–№5 [5];

– ітераційний комбінаторний оптимізаційний підалгоритм, що на початковому розкладі σ^{fp} реалізує однотипні ітераційні алгоритмічні процедури. На кожній ітерації реалізується можливість використання резервів часу попередніх завдань черговим конкуруючим завданням [5] розкладу σ^{fp} і знаходиться оптимальний розклад на підпослідовності завдань, що розглядаються на цій ітерації [5]. Для викладеної ітераційної оптимізаційної процедури сформульовані та доведені достатні ознаки оптимальності розкладу на множині всіх завдань, отриманої на цій ітерації (достатні ознаки оптимальності №6, №8, №9 [5]). Перевірка цих умов в загальному випадку не реалізується поліноміальним підалгоритмом;

– сформульована поліноміальна складова ПДС-алгоритму, яка полягає в: (1) послідовній перевірці виконання достатніх ознак оптимальності №1–№5, №7 [5], виконуваної до ітераційних оптимізаційних підалгоритмів; (2) реалізації поліноміальних алгоритмічних процедур для перевірки достатніх ознак оптимальності №9–№12, послідовність виконання яких сформульована в твердженні 4.39 пп. 2), 3) [5];

– в твердженні 4.40 [5] наведені умови, при виконанні яких точний експоненціальний по складності підалгоритм, що реалізує ітераційні оптимізаційні процедури, стає поліноміальним по складності;

– в твердженнях 4.41–4.43 [5] доводиться, що запропонований ПДС-алгоритм знаходить оптимальний розв’язок.

В загальному випадку гарантувати, що запропонований ПДС-алгоритм завжди ефективно знаходить оптимальний розв’язок, неможливо. В [5] наведена його спрощена версія, яка статистично значимо дозволяє знаходити оптимальний розв’язок (якщо виконалась одна з достатніх умов оптимальності) чи отримати наближений розв’язок, який за значенням критерію мало відрізняється від оптимального його значення.

1.2. Одноетапна задача КП «Мінімізація сумарного запізнення виконання завдань на незалежних ідентичних паралельних пристроях відносно спільного директивного строку»

Розглянемо постановку задачі. Маємо множину незалежних завдань $j,\ j = \overline{1,n}$, для кожного з яких треба виконати одну операцію на одному з m незалежних ідентичних паралельних пристроїв за час $l_j > 0,\ j = \overline{1,n}$. Всім завданням відповідає один директивний строк d. Моменти готовності пристроїв до виконання операцій $r_i,\ i = \overline{1,m}$, довільні та фіксовані. Необхідно побудувати розклад, якому відповідає

$$\min \sum_{j=1}^{n} \max\left(0,\ C_j - d\right), \tag{2}$$

де C_j – момент завершення виконання *j*-го завдання.

Ця задача є NP-повною. Створений О. А. Павловим, О. Б. Місюрою, О. Г. Ждановою, О. В. Мельниковим ПДС-алгоритм ефективно розв’язує індивідуальні задачі з тисячами завдань [6].

1.3. Задачі комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності

О. А. Павловим [7] був досліджений наступний клас задач комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності:

$$\min_{\sigma\in\Omega} \sum_{i=1}^{s} \omega_i k_i(\sigma), \tag{3}$$

де $\omega_i > 0,\ i = \overline{1,s}$ – експертні ваги, $k_i(\sigma)$ – *i*-та довільна числова характеристика допустимого розв’язку, Ω – дискретна обмежена множина допустимих розв’язків. Неоднозначність полягає в тому, що існує L наборів значень ваг $\{\omega_i^l,\ i = \overline{1,s}\},\ l = \overline{1,L}$, кожен з яких може бути набором значень коефіцієнтів $\omega_i > 0,\ i = \overline{1,s}$, в (3). Наведені оригінальні критерії та відповідні компромісні розв’язки цієї задачі.

2. Детермінована двоетапна задача КП

Детальна якісна постановка цієї задачі наведена в анотації.

2.1. Формальна модель детермінованої двоетапної задачі КП

2.1.1. Формальна модель першого етапу

Формальна модель першого етапу збігається з постановкою одноетапної задачі КП, викладеної в підрозділі 1.2. Змінюються лише умови, що накладаються на оптимальний розв’язок першого етапу σ_1. На розкладі σ_1 повинні виконуватись умови:

а) $$\sigma_1 = \arg\min_{\sigma} \sum_{i=1}^{m} \max\left(0, C^i(\sigma) - d\right), \tag{4}$$

де $C^i(\sigma)$ – момент завершення роботи *i*-го пристрою для розкладу σ;

б) серед всіх розкладів $\{\sigma_1\}$, оптимальних за критерієм (4), оптимальним розкладом першого етапу є той, на якому досягається

$$\min_{\sigma_1 \in \{\sigma_1\}} \left\{ \max_i C^i(\sigma_1) - \min_i C^i(\sigma_1) \right\}; \tag{5}$$

в) на σ_1 виконується наперед заданий лексикографічний порядок на величини $C^i(\sigma_1),\ i = \overline{1, m}$, а саме:

$$C^{i_1}(\sigma_1) \le C^{i_2}(\sigma_1) \le \ldots \le C^{i_m}(\sigma_1); \tag{6}$$

2.1.2. Формальна модель другого етапу

Пристрої вважаються багатофункціональними. Для кожного пристрою формулюються індивідуальні однотипні (див. підрозділ 1.1) одноетапні задачі КП:

– задаються моменти запуску пристроїв $r_i = C^i(\sigma_1),\ i = \overline{1, m}$, де σ_1 – розклад, знайдений на першому етапі;

– множини завдань, виконуваних на *i*-му пристрої: $J_i = \left\{ j_1^i, \ldots, j_{n_i}^i \right\}$, де n_i – їх кількість; час їх виконання на *i*-му пристрої $l\left(j_t^i\right),\ t = \overline{1, n_i}$; директивні строки їх виконання $d\left(j_t^i\right) > 0,\ t = \overline{1, n_i},\ i = \overline{1, m}$;

– множина експертних ваг $\omega_{j_t^i} > 0,\ t = \overline{1, n_i},\ i = \overline{1, m}$.

Для кожного пристрою треба знайти розклад σ_2^i виконання множини завдань $J_i,\ i = \overline{1, m}$, на якому досягається

ISSN 1560-8956

$$\min \sum_{t=1}^{n_i} \omega_{j_t^i} \max\left(0, C_{j_t^i} - d\left(j_t^i\right)\right), \tag{7}$$

де $C_{j_t^i}$ – момент завершення *t*-го завдання на *i*-му пристрої, $t = \overline{1, n_i}$.

2.1.3. Критерії оптимальності розкладу двоетапної задачі КП в детермінованій постановці

Множина розкладів $\left\{\sigma_1, \sigma_2^i, i = \overline{1, m}\right\}$ є оптимальним розв’язком, якщо σ_1 задовольняє умовам (4)–(6), а при знайдених на першому етапі $r_i = C^i(\sigma_1)$, $i = \overline{1, m}$, для кожного розкладу σ_2^i, $i = \overline{1, m}$, виконується умова (7).

2.2. ПДС-алгоритми для двоетапної задачі КП в детермінованій постановці

2.2.1. Перший ПДС-алгоритм

2.2.1.1. Алгоритм першого етапу

Алгоритм першого етапу спочатку розв’язує задачу побудови розкладу σ_1, для якого виконується тільки умова (5). Ефективний наближений ітераційний поліноміальний за складністю алгоритм, у якого на кожній ітерації зменшується величина (5), очевидним чином реалізується з використанням підмножини направлених переставлень [8]. Якщо в отриманому розкладі σ_1 виконується $\forall i\ C^i(\sigma_1) \le d$ чи $\forall i\ C^i(\sigma_1) \ge d$, то на розкладі σ_1 виконується умова (4). Якщо на σ_1 виконується

$$\forall i \ne j\ C^i(\sigma_1) = C^j(\sigma_1) \tag{8}$$

чи

$$\max_i C^i(\sigma_1) - \min_i C^i(\sigma_1) = \text{НСД}, \tag{9}$$

де НСД – найменший спільний дільник тривалостей виконання завдань, при виконанні додаткових умов – цілочисельності l_j, $j = \overline{1, n}$, та рівності моментів запуску пристроїв на першому етапі, – то для розкладу σ_1 виконується умова (5).

Нехай для розкладу σ_1 виконується наступна умова:

$$\exists j, i : C^j(\sigma_1) < d,\ C^i(\sigma_1) > d \tag{10}$$

В цьому випадку в силу використання направлених переставлень [8] у будь-якого пристрою на σ_1 запізнюється не більше одного завдання, і критерії оптимальності задачі КП першого етапу і задачі КП (підрозділ 1.2) збігаються. Тому, якщо на σ_1 виконується умова (10), на першому етапі повторно розв’язується одноетапна задача КП як задача, сформульована в підрозділі 1.2, ефективним ПДС-алгоритмом [6]. Це дозволяє з двох отриманих розкладів обрати той, у якого менше значення суми в виразі (4), та отримати ефективну оцінку відхилення цієї величини від оптимального значення. Дійсно, позначимо через σ розклад, отриманий внаслідок розв’язку задачі першого етапу за критерієм (2). Тоді оцінка цього відхилення задається величиною $\min\left(R_\Sigma(\sigma), \Delta_\Sigma(\sigma)\right)$ [6].

Для спрощення наступних викладок розклад, отриманий на першому етапі, незалежно від того, яким алгоритмом він був отриманий, позначаємо як σ_1. Для виконання на отриманому розкладі σ_1 умови (6) в силу ідентичності пристроїв на першому етапі переставляємо розклади на кожному пристрої відповідно до заданого лексикографічного порядку (виконання нерівностей (6)).

2.2.1.2. Алгоритм другого етапу

Алгоритм другого етапу складається з m підалгоритмів, кожен з яких є ПДС-алгоритмом для задачі КП, сформульованої в загальному вигляді в підрозділі 1.1, і розв’язує відповідну задачу для кожного пристрою. Достатні ознаки оптимальності отриманих розв’язків в загальному вигляді наведені в підрозділі 1.1.

2.2.2. Достатні ознаки оптимальності першого ПДС-алгоритму

Нехай отримано розклад $\left\{\sigma_1, \sigma_2^i, i = \overline{1,m}\right\}$. Якщо σ_1 задовольняє умовам (4); (8) чи (9); (6), а $\sigma_2^i, i = \overline{1,m}$, – однієї з достатніх умов оптимальності, сформульованих в підрозділі 1.1, то отриманий розклад є оптимальним. Якщо для σ_1 не виконується умова (8) чи (9), то отриманий розклад двоетапної задачі КП є оптимальним за наступним критерієм: на першому етапі для розкладу виконується умова (4), розклади другого етапу $\sigma_2^i, i = \overline{1,m}$, є умовно оптимальними – оптимальними відносно моментів запуску пристроїв на другому етапі.

Примітка. Хоча на розкладі першого етапу в цьому випадку виконання критерію (5) не гарантується, як показали статистичні дослідження, відхилення від оптимального значення величини (5) є статистично незначним.

Перший ПДС-алгоритм двоетапної задачі КП статистично значимо реалізує умовно оптимальний розв’язок, але потребує достатніх обчислювальних ресурсів.

2.2.3. Другий ПДС-алгоритм

Другий ПДС-алгоритм є швидкісним, але на другому етапі реалізує суттєво меншу кількість достатніх ознак оптимальності. На першому етапі розв’язується одноетапна задача КП за критерієм (5). На другому етапі для кожного пристрою будується розклад σ^{fp} [5] в загальному випадку. Розклад σ^{fp} знаходиться за розкладом σ^{ord} [5], в якому завдання упорядковані за незростанням пріоритетів $p_j = \omega_j / l_j$, де $\omega_j > 0$ – експертна вага, l_j – час виконання *j*-го завдання. Алгоритм побудови σ^{fp} за σ^{ord} полягає в послідовному виконанні для σ^{ord} всіх можливих вільних перестановок [5], де вільна перестановка завдання, яке в розкладі σ^{ord} займає позицію *k*, означає його перестановку на позицію з максимальним номером, на якому це завдання не порушує свій директивний строк, і при цьому зменшується значення суми в критерії (1). В [5] для розкладу σ^{fp} сформульовано 5 достатніх ознак оптимальності.

3. ПДС-алгоритм розв’язання двоетапної задачі КП в умовах невизначеності

Формальна модель двоетапної задачі КП в умовах невизначеності відрізняється від детермінованої лише на другому етапі, а саме: для кожного приладу задається не один набір експертних ваг $\omega_{j_t^i} > 0,\ t = \overline{1, n_i},\ i = \overline{1, m}$, а L_i можливих таких наборів $\omega^l_{j_t^i} > 0,\ t = \overline{1, n_i},\ l = \overline{1, L_i},\ i = \overline{1, m}$. Ці набори можуть:

– бути результатами експертних оцінок різних фахівців;

– бути випадковими наборами з заданою ймовірністю наставання;

– для кожного набору існує експертна оцінка міри його достовірності.

Розв’язок двоетапної задачі КП в умовах невизначеності полягає в тому, що на другому етапі необхідно для кожного приладу визначити критерій компромісного розв’язку та відповідний цьому критерію ПДС-алгоритм розв’язання. Запропоноване рішення є наслідком теоретичних результатів, отриманих О. А. Павловим в [7]. Щоб не використовувати зайвих індексів, розв’яжемо цю задачу в загальній постановці (див. підрозділ 1.1)

$$\min_{\sigma\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \max\left(0, C_i - d_i\right), \tag{11}$$

де Ω – обмежена множина можливих розкладів з *n* завдань. (11) повністю збігається з (1) [7], де $k_i(\sigma) = \max\left(0, C_i - d_i\right), s = n$.

Маємо L наборів можливих значень ваг $\overline{\omega}^l = \{\omega_1^l, ..., \omega_n^l\}, l = \overline{1, L}$. Нехай f_{opt}^l – це невідомі нам значення критеріїв оптимальності наступних задач КП, в загальному вигляді сформульованих в підрозділі 1.1:

$$f_{opt}^l = \min_{\sigma\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^l \max\left(0, C_i - d_i\right), l = \overline{1, L}. \tag{12}$$

Тобто, задачі (12) заздалегідь не розв’язувались.

Сформулюємо компромісні критерії розв’язання одноетапної задачі КП (11)–(12) та відповідні кожному з них детерміновані одноетапні задачі КП, в загальному вигляді сформульовані в підрозділі 1.1.

3.1. Перший компромісний критерій:

$$\min_{\sigma\in\Omega} \sum_{l=1}^{L} a_l \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^l \max\left(0, C_i - d_i\right) - f_{opt}^l \right), \tag{13}$$

де $a_l > 0$ – експертні ваги. Як показано в [7], оптимальному значенню компромісного критерію (13) відповідає наступний розклад σ_{opt}^1:

$$\sigma_{opt}^1 = \arg\min_{\sigma\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{L} a_l \omega_i^l \right) \max\left(0, C_i - d_i\right). \tag{14}$$

3.2. Другий компромісний критерій

Нехай $\{\sigma_l\}$ – це невідома нам множина розв’язків наступної одноетапної задачі КП: $\{\sigma_l\} = \{\arg\} \min\limits_{\sigma\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^l \max\left(0, C_i - d_i\right)$. Другий компромісний критерій має вигляд

$$\min_{\sigma\in\{\sigma_l\}} \sum_{m=1, m\neq l}^{L} a_m \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^m \max\left(0, C_i - d_i\right) - f_{opt}^m \right), \tag{15}$$

де $a_m > 0, m = \overline{1, L}, m \neq l$, – експертні ваги. Тобто, серед всіх можливих розв’язків задачі (12) треба знайти той, на якому значення суми в (15) є мінімальним. Як показано в [7], завжди існує таке додатне число a_l^*, що для всіх $a_l \geq a_l^*$

виконується

$$\min_{\sigma\in\Omega} \sum_{l=1}^{L} a_l \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^l \max\left(0, C_i - d_i\right) - f_{opt}^l \right) =$$

$$= \min_{\sigma\in\{\sigma_l\}} \sum_{m=1, m\neq l}^{L} a_m \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^m \max\left(0, C_i - d_i\right) - f_{opt}^m \right). \quad (16)$$

Алгоритмічна процедура знаходження розкладу, якому відповідає (16), є наступною:

– знаходиться $f_{opt}^l = \min\limits_{\sigma\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^l \max\left(0, C_i - d_i\right)$;

– задається достатньо велике число $a_l > 0$. Тоді

$$\arg\min_{\sigma\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{L} a_l \omega_i^l \right) \max\left(0, C_i - d_i\right) = \sigma_{opt}^2, \quad (17)$$

якщо для розкладу (17) виконується $\sum_{i=1}^{n} \omega_i^l \max\left(0, C_i - d_i\right) = f_{opt}^l$.

3.3. Третій компромісний критерій

Нехай існують ймовірності $p_l > 0$ $\left(\sum_{l=1}^{L} p_l = 1\right)$ наставання кожного набору $\left(\omega_1^l, ..., \omega_n^l\right)$, $l = \overline{1, L}$. Задамо *n*+1-вимірну дискретну випадкову величину $\overline{\omega}_1, ..., \overline{\omega}_n$, $\overline{f}_{opt}$ таблицею

$$\begin{Bmatrix} \omega_1^l, ..., \omega_n^l & f_{opt}^l \\ p_l > 0, \; l = \overline{1, L} & \end{Bmatrix}$$

та дискретну випадкову величину $F(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_i \max\left(0, C_i - d_i\right) - \overline{f}_{opt}^{\,l}$.

Третій компромісний критерій має вигляд

$$\min_{\sigma\in\Omega} MF(\sigma) = \min_{\sigma\in\Omega} \sum_{l=1}^{L} p_l \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^l \max\left(0, C_i - d_i\right) - f_{opt}^l \right). \quad (18)$$

Розклад, якому відповідає (18), є розв’язком наступної детермінованої задачі КП:

$$\sigma_{opt}^3 = \arg\min_{\sigma\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{L} p_l \omega_i^l \right) \max\left(0, C_i - d_i\right).$$

3.4. Четвертий компромісний критерій

Набір значень експертних ваг $\omega_i > 0, i = \overline{1, n}$, задається в термінах дискретних нечітких множин

$$\left\{ \begin{array}{c} \omega_1^l, ..., \omega_n^l \quad f_{opt}^l \\ 0 \le \mu\left(\omega_1^l, ..., \omega_n^l\right) \le 1, \; l = \overline{1, L} \end{array} \right\},$$

де кожна міра достовірності $\mu\left(\omega_1^l, ..., \omega_n^l\right)$ набору $\omega_1^l, ..., \omega_n^l$ значень нечітких ваг $\omega_1, ..., \omega_n$ знаходиться також експертним шляхом.

Четвертий компромісний критерій має вигляд

$$\sum_{\sigma \in \Omega} \sum_{l=1}^{L} \mu\left(\omega_1^l, ..., \omega_n^l\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^l \max\left(0, C_i - d_i\right) - f_{opt}^l \right).$$

Йому відповідає розв’язок наступної детермінованої задачі КП:

$$\sigma_{opt}^4 = \arg\min_{\sigma \in \Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{L} \mu\left(\omega_1^l, ..., \omega_n^l\right) \cdot \omega_i^l \right) \max\left(0, C_i - d_i\right).$$

Таким чином, на другому етапі двоетапної задачі КП в умовах невизначеності для кожного пристрою вибирається один з чотирьох компромісних критеріїв, і ПДС-алгоритмом розв’язується відповідна детермінована одноетапна задача КП (див. підрозділ 1.1).

Сформульовані двоетапні задачі КП містять експертні ваги та міри, знаходження яких є окремою науковою проблемою. Ефективні алгоритми обґрунтованого знаходження експертних ваг та мір за емпіричними матрицями парних порівнянь довільної розмірності, можливо, не повністю заповненими, запропоновані М. З. Згуровським, О. А. Павловим та його учнями [9].

Висновки

Таким чином, в роботі:

1. Сформульована NP-складна двоетапна задача календарного планування в детермінованій постановці та в умовах невизначеності;

2. Для двоетапної задачі календарного планування в умовах невизначеності сформульовані чотири компромісні критерії розв’язку;

3. Для кожного зі сформульованих критеріїв оптимальності двоетапної задачі календарного планування в обох постановках запропоновані алгоритми, кожен з яких включає в себе наближений поліноміальний підалгоритм, що

 ISSN 1560-8956

містить достатні умови оптимальності побудованого розкладу. Тобто, запропоновані алгоритми належать до класу ПДС-алгоритмів;

4. Ефективність приведених ПДС-алгоритмів є наслідком попередніх теоретичних та експериментальних досліджень підалгоритмів, що входять до їх складу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Li X., Gao L. Introduction for Integrated Process Planning and Scheduling. *Engineering Applications of Computational Methods*. 2020. Vol. 2. P. 1–15. DOI: 10.1007/978-3-662-55305-3_1.

2. NP-Hard Scheduling Problems in Planning Process Automation in Discrete Systems of Certain Classes / Pavlov A.A. et al. *Advances in Intelligent Systems and Computing* : The First International Conference on Computer Science, Engineering and Education Applications ICCSEEA 2018, Kyiv, 18-20 Jan. 2018. Cham: Springer, 2019. P. 429–436. DOI: 10.1007/978-3-319-91008-6_43.

3. Pavlov A.A., Khalus E.A., Borysenko I.V. Planning Automation in Discrete Systems with a Given Structure of Technological Processes. *Advances in Intelligent Systems and Computing* : The First International Conference on Computer Science, Engineering and Education Applications ICCSEEA 2018, Kyiv, 18-20 Jan. 2018. Cham: Springer, 2019, P. 177–185. DOI: 10.1007/978-3-319-91008-6_18.

4. Ceschia S., Di Gaspero L., Schaerf A. Solving discrete lot-sizing and scheduling by simulated annealing and mixed integer programming. *Computers & Industrial Engineering*. 2017. Vol. 114. P. 235-243. DOI: 10.1016/j.cie.2017.10.017.

5. Zgurovsky M.Z., Pavlov A.A. The Total Weighted Tardiness of Tasks Minimization on a Single Machine. In: Combinatorial Optimization Problems in Planning and Decision Making: Theory and Applications. 1st ed. *Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 173, P. 107–217. – Springer, Cham, 2019. DOI: 10.1007/978-3-319-98977-8_4.

6. Zgurovsky M.Z., Pavlov A.A. The Total Tardiness of Tasks Minimization on Identical Parallel Machines with Arbitrary Fixed Times of Their Start and a Common Due Date. In: Combinatorial Optimization Problems in Planning and Decision Making: Theory and Applications. 1st ed. *Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 173, P. 265–290. – Springer, Cham, 2019. DOI: 10.1007/978-3-319-98977-8_6.

7. Pavlov A.A. Optimization for one class of combinatorial problems under uncertainty. Adaptive Systems of Automatic Control, Vol. 1 (34), 2019, C. 81–89. DOI: 10.20535/1560-8956.1.2019.178233.

8. Павлов О.А., Жданова О.Г., Сперкач М.О. Задача составления допустимого расписания с максимально поздним моментом запуска выполнения идентичными параллельными приборами работ с общим директивным сроком. *Вісник НТУУ "КПІ". Серія "Інформатика, управління та обчислювальна техніка"*. 2014. Вип. 61. С. 93-102. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/16721 (дата звернення: 10.03.2023).

9. Zgurovsky M.Z., Pavlov A.A. The Four-Level Model of Planning and Decision Making. In: Combinatorial Optimization Problems in Planning and Decision Making: Theory and Applications. 1st ed. *Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 173, P. 265–290. – Springer, Cham, 2019. DOI: 10.1007/978-3-319-98977-8_8.