

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ РЕГУЛЯТОРОВ, СИНТЕЗИРОВАННЫХ НА ОСНОВЕ УЛУЧШЕННЫХ ФИЛЬТРОВ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Аннотация: В статье рассмотрена задача оптимального управления при помощи “выходного” регулятора. Оптимальный регулятор представляет собой последовательное соединение оптимального регулятора и улучшенного фильтра переменных состояния, построенного основе на корректной постановке задачи фильтрации.

Ключевые слова: переменные состояния, оценки переменных состояния, синтез, фильтр переменных состояния, выходной регулятор, оптимальное управление, интегральный критерий качества, эффективность.

Статья посвящена решению задач оптимального квадратичного управления линейными динамическими объектами при желаемых выходных величинах и наличии помех при помощи регуляторов, синтезированных на основе улучшенных фильтров переменных состояния, разработанных автором [1].

Задача управления в статье рассматривается в постановке, приведенной в [1], которая имеет следующий вид:

$$\min_u \left\{ \begin{array}{l} \|y_{ж}(t_2) - y(t_2)\|_S^2 \\ + \int_{t_1}^{t_2} [\|y_{ж}(t) - y(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2] dt \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t), \\ y(t) = Cx(t) + v(t), \\ y_{ж}(t) = Cx_{ж}(t), \\ M\hat{x} = Mx(t), Mw(t) = 0, \\ Mv(t) = 0, \\ Cov[w(t), w(\tau)] = Q_w\delta(t - \tau), \\ Cov[v(t), v(\tau)] = R_v\delta(t - \tau), \\ Cov[w(t), v(\tau)] = 0, \\ Cov[w(t), \hat{x}(0)] = 0, \\ Cov[v(t), \hat{x}(0)] = 0, \\ Cov[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = P(0), \\ x(0) - \text{не известно} \end{array} \right. \quad (1)$$

где $y_{ж}(t)$ – желаемая выходная величина объекта,

$$\|y_{ж}(t_2) - y(t_2)\|_S^2 = [y_{ж}(t_2) - y(t_2)]^T S [y_{ж}(t_2) - y(t_2)], \quad (2)$$

$$\|y_{ж}(t) - y(t)\|_S^2 = [y_{ж}(t) - y(t)]^T S [y_{ж}(t) - y(t)], \quad (3)$$

$$\|u(t)\|_R^2 = u(t)^T Ru(t), \quad (4)$$

A, B, C – матрицы состояния, входа и выхода объекта соответственно, G – матрица входа помехи, M, Cov – операторы математического ожидания и ковариации соответственно, Q_w, R_v – интенсивности помех на входе объекта w и выходе его измерителя v , $\hat{x}(t)$ – оценки переменных состояния.

Согласно теореме разделения оптимальные регуляторы представляются собой последовательное соединение оптимальных регуляторов, синтезированных при наличии полной информации, и фильтров переменных состояния. При этом информация, на основе которой регулятор генерирует управление, представляет собой оценки переменных состояния, определенные фильтром. Таким образом, по существу качество управления зависит от качества определения оценок переменных состояния. Отсюда вытекает, что степень оптимальности решения задачи управления существенным образом зависит от степени оптимальности фильтрации. До недавних пор считалось, что стандартные фильтры Калмана обеспечивают оптимальность оценок переменных состояния с точки зрения их несмещенности и эффективности. Однако последнее не имеет места, так как стандартные фильтры Калмана синтезируются на основе постановки задачи фильтрации, которая не учитывает влияние всех факторов на эффективность оценок, а именно калмановская постановка задачи фильтрации не учитывает такой фактор, как влияние рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра. В соавторстве автор статьи разработал корректную постановку задачи фильтрации [2], учитывающую все факторы, которые влияют на качество оценок переменных состояния, в том числе и фактор рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра.

На основе предложенной постановки задачи фильтрации разработаны подходы синтеза улучшенных фильтров переменных состояния.

Применение улучшенных фильтров переменных состояния в контуре управления естественным образом приведет к улучшению качества управления, в том числе и качество решения задачи (1). Цель данной статьи состоит в доказательстве указанного.

Для синтеза регулятора переменных состояния в данной работе использован улучшенный фильтр переменных состояния, синтезированный на основе винеровского подхода фильтрации и учета влияния рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра.

Оптимальный регулятор при наличии полной информации синтезирован на стандартном подходе [1]. Методика его синтеза состоит в следующем:

1. Определяем гамильтониан:

$$H(x, u, \lambda, t) = \|y_{ж}(t) - Cx(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2 + \lambda^T(t) [Ax(t) + Bu(t) + Gw(t)]. \quad (5)$$

2. Используя принцип максимума и положив $\partial H / \partial u = 0$, получим:

$$u(t) = -R^{-1}B^T \lambda(t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\dot{\lambda} = C^T Q [Cx(t) - y_{\text{жс}}(t)] + A^T \lambda(t). \quad (7)$$

3. При наличии граничного условия:

$$\lambda(t_2) = C^T S [Cx(t_2) - y_{\text{жс}}(t_2)]. \quad (8)$$

4. Чтобы определить управление по замкнутому контуру, предположим, что:

$$\lambda(t) = Kx(t) - \xi(t). \quad (9)$$

5. Подставив (9) в каноническое уравнение получаем дифференциальное уравнение Риккати:

$$\dot{K} = -KA - A^T K + KBR^{-1}B^T K - C^T QC, \quad (10)$$

$$K(t_2) = C^T SC. \quad (11)$$

6. Уравнение Риккати дополнительного воздействия:

$$\dot{\xi} = -[A - BR^{-1}BK]^T \xi + KGw(t) - C^T Qy_{\text{жс}}(t), \quad (12)$$

$$\xi(t_2) = C^T Sy_{\text{жс}}(t_2). \quad (13)$$

7. Таким образом закон оптимального управления будет выглядеть следующим образом:

$$u(t) = -R^{-1}B^T [Kx(t) - \xi(t)]. \quad (14)$$

Улучшенный фильтр переменных состояния, который используется при создании общего регулятора при наличии помех синтезирован, как было указано, на основе винеровского подхода фильтрации и учета влияния рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра.

Наличие рассогласования $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$ начальных условий переменных состояния объекта $x(0)$ и фильтра $\hat{x}(0)$ приводит к тому, что ошибка фильтрации $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ будет содержать свободную составляющую $\varepsilon_{\text{св}}(t)$, равную:

$$\varepsilon_{\text{св}}(t) = \Phi(t)\varepsilon(0) = e^{Lt}\varepsilon(0), \quad (15)$$

$$L(t) = A - K(t)C, \quad (16)$$

где $L(t)$, $K(t)$ – соответственно матрица состояния и усиления фильтра.

Необходимо отметить, что после выхода фильтра Калмана на стационарный режим он вырождается в фильтр Винера, то есть $K(t) = K_B =$

Const. Отсюда вытекает, что задача фильтра Калмана отличается от задачи фильтра Винера тем, что первый должен обеспечить эффективность оценок на интервале его выхода на стационарный режим.

На основе (15) можно сделать вывод, что при отсутствии рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра калмановские и винеровские оценки переменных состояния идентичны. Этот факт обуславливает справедливость утверждения, что на базе винеровского подхода возможен синтез улучшенного фильтра переменных состояния. Эта возможность будет реализована, если каким-то образом удастся компенсировать влияние рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра. Очевидно, эта возможность может быть реализована, если на фильтр в качестве начальных условий $\hat{x}(0)$ будет установлена “достаточно хорошая оценка” $\hat{x}_o(0)$ начальных условий переменных состояния объекта, то есть, если $\hat{x}(0) = \hat{x}_o(0)$. Оценка $\hat{x}_o(0)$ может быть определена различными методами на основе “короткой выборки” $\{y_{\Delta t}\}$ выходной величины объекта $y(t)$, где Δt – длина выборки.

Экспериментальные исследования теоретических результатов

Экспериментальные исследования теоретических результатов были выполнены путем их компьютерного моделирования в стандартной среде *Math CAD13*.

1) В статье приведены результаты экспериментальных исследований для следующего объекта 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + v(t). \end{aligned} \quad (17)$$

при “белых” помехах с интенсивностями $Q_w = 0.3, R_v = 0.3$.

2) Рассогласование начальных условий переменных состояния объекта и фильтра – равномерное распределение при выборке $\{\varepsilon_1(0), \dots, \varepsilon_{21}(0)\}$.

3) Для определения оценки качества управления использованы меры:

$$I = \int_0^{\infty} [X(t)^T Q X(t) + R u^2(t)] dt, I_x = \int_0^{\infty} [X(t)^T Q X(t)] dt, I_u = \int_0^{\infty} R u^2(t) dt. \quad (18)$$

4) Для сравнения эффективности калмановского и улучшенного решений задач управления использованы следующие меры:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=0}^N I_i^K}{\sum_{i=0}^N I_i^y}, \alpha_x = \frac{\sum_{i=0}^N I_{xi}^K}{\sum_{i=0}^N I_{xi}^y}, \alpha_u = \frac{\sum_{i=0}^N I_{ui}^K}{\sum_{i=0}^N I_{ui}^y}, \quad (19)$$

где K – индекс калмановского решения, y – улучшенного решения, а N – количество рассогласований.

Ниже приводятся результаты компьютерного моделирования данной системы.

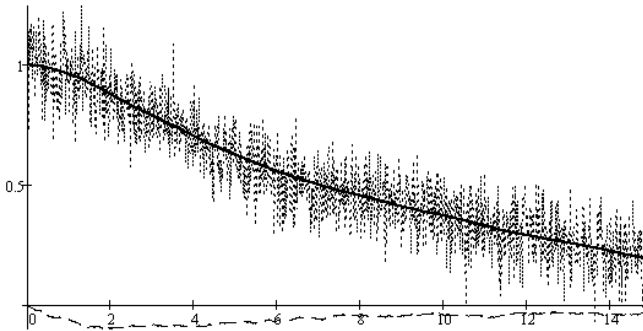


Рис. 1 – Графики первой, второй переменных состояния и выхода измерителя (сплошная, пунктирная и точечная линии соответственно).

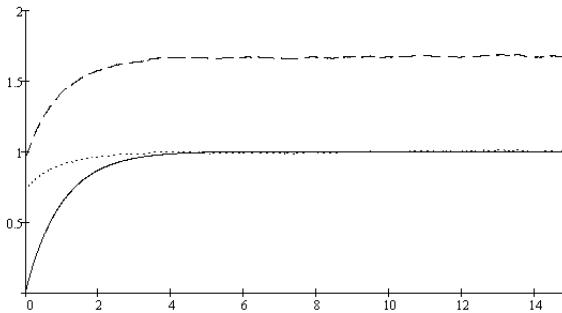


Рис. 2 – Графики желаемой выходной величины, первого и второго коэффициента дополнительного воздействия (сплошная, пунктирная и точечная линии соответственно).

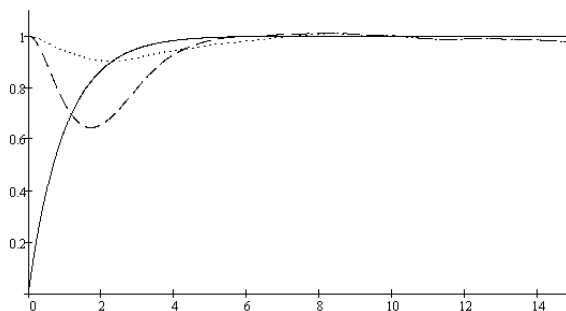


Рис. 3 – Графики желаемой выходной величины, первой переменной состояния управляемой регулятором на основе фильтра Калмана и улучшенного фильтра переменных состояния (сплошная, пунктирная и точечная линии соответственно).

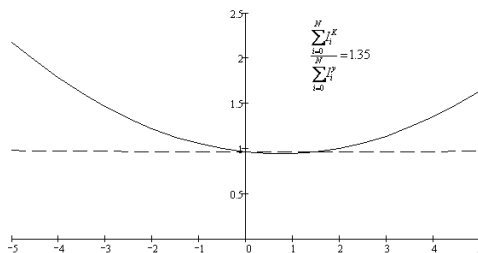


Рис. 4 – Графики общего критерия качества I управления на основе фильтра Калмана и улучшенного фильтра переменных состояния (сплошная и пунктирная линии соответственно).

Результаты экспериментальных исследований убедительно показывает эффективность предложенного варианта решения задачи оптимального управления.

Литература

1. Э.П. Сейдж, Ч.С. Уайт III. Оптимальное управление системами // Москва – 1982.
2. А.Г. Кикун, В.Ю. Шейко. Корректная постановка задачи фильтрации переменных состояния и подходы ее решения. // Адаптивные системы автоматического управления. – 2011. – № 19 (39).

Отримано 27.11.2012 р.

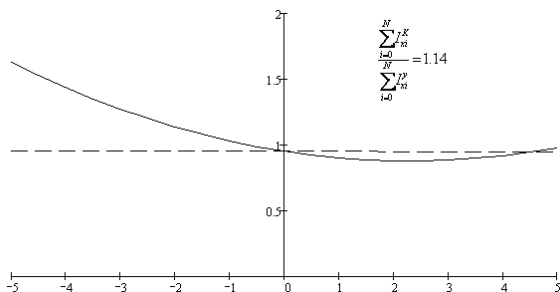


Рис. 5 – Графики общего критерия качества I_x управления на основе фильтра Калмана и улучшенного фильтра переменных состояния (сплошная и пунктирная линии соответственно).

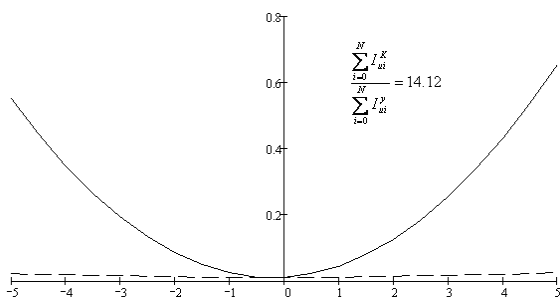


Рис. 6 – Графики общего критерия качества I_u управления на основе фильтра Калмана и улучшенного фильтра переменных состояния (сплошная и пунктирная линии соответственно).