УДК 621-501.72

А.А. Стенин, В.П. Пасько, П.С. Хоменко

МЕТОД ФИКТИВНОЙ КООРДИНАТЫ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Аннотация: Рассмотрена задача оптимального управления системами с последействием. Предложен метод фиктивной координаты, позволяющий свести исходную систему с последействием к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений переноса, для которых применимы известные методы оптимизации. Продемонстрировано практическое использование метода фиктивной координаты на примере решения задачи оптимального управления автономной отопительной системой производственного помещения. Метод обобщен на системы с нестационарным запаздыванием и системы с несколькими процессами, обладающими последействием.

Ключевые слова: Ключевые слова: оптимальное управление, метод фиктивной координаты, системы с последействием.

Введение

В последнее время решению задач оптимального управления системами с последействием уделяется большое внимание. Это обусловлено появлением большого количества технологических процессов, связанных с рециркуляцией материальных потоков, перемешиванием реагентов жидкой и газообразной среды и др. Задачу оптимального управления для некоторых простых систем с постоянным временем задержки можно решить на основе методов вариационного исчисления, принципа максимума или динамического программирования, распространив их на системы дифференциально-разностных уравнений с отклоняющимся аргументом [1]. Примеры решения некоторых частных задач для систем второго порядка приведены в [2] и [3]. Однако в общем случае, в частности, для систем более высокого порядка синтез оптимального управления вызывает принципиальные трудности в получении точного или приближенного решения. Это приводит к необходимости перехода к системам, эквивалентным исходным системам с последействием.

Постановка задачи

Для системы, описываемой дифференциально-разностным уравнением вида

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{u}(t), t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t), t \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

где τ – чистое запаздывание, необходимо построить эквивалентную ей систему без запаздывания.

Метод фиктивной координаты

Перейдем от записи (1) и (2) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных [4]:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t) \tag{3}$$

$$\frac{d\mathbf{y}(t,\theta)}{dt} + \frac{d\mathbf{y}(t,\theta)}{d\theta} = 0. \tag{4}$$

с начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0(0), \\ \mathbf{y}(0,\theta) &= \mathbf{y}_0(\theta), \theta \in [0,\tau], \\ \mathbf{y}(t,0) &= \mathbf{x}(t), t \in [0,T], \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{y}(t,\tau), t \in [0,T], \end{aligned} \tag{5}$$

где $y_0(\theta) = x_0(-\theta), T$ – время управления.

Подставляя решение $\mathbf{y}(t,\tau)$уравнения (4) в соотношение (3), нетрудно убедиться в эквивалентности этих представлений. Переменная θи вектор $\mathbf{y}(t,\theta)$ выполняют роль фиктивной координаты и вектора состояния для случая, когда в системе, определяемой уравнением (1), отсутствует чистое запаздывание.

Преимущества такого определения очевидны, так как уравнение (4) можно применить для описания более общих процессов систем с отклоняющимися аргументами. Для этого достаточно ввести в это уравнение некоторый множитель $\mathbf{g}(t,\theta)$ и соответствующим образом изменить правую часть, чтобы получить уравнение вида:

$$\frac{d\mathbf{y}(t,\theta)}{dt} + g(t,\theta)\frac{d\mathbf{y}(t,\theta)}{d\theta} = \mathbf{h}(\mathbf{y}(t,\theta), \mathbf{w}(t,\theta), t, \theta), \tag{6}$$

$$t \in [0,T], \theta \in [0,\tau]$$

с теми же начальными и граничными условиями (5) и сохранить прежнюю систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3). Уравнение (6) известно как линейное уравнение перенос [5]. Здесь $\mathbf{x}(t)$ – n-мерный вектор состояния системы с сосредоточенными параметрами, $\mathbf{y}(t,\theta)$ – n-мерный вектор состояния процесса с чистым запаздыванием, $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t,\tau)$ – n-мерный выход, который одновременно является входной переменной для системы (3), $\mathbf{u}(t)$ – r-мерный вектор управления системой с сосредоточенными параметрами и $\mathbf{w}(t,\theta)$ –s-мерный вектор управления чистым запаздыванием (рис. 1).

Предполагается, что функции $\mathbf{f}(\cdot)$ и $\mathbf{h}(\cdot)$ имеют непрерывные вторые производные по всем аргументам и удовлетворяют условиям Липшица. Функция $\mathbf{g}(t,\theta)$ непрерывна и, кроме того, $\mathbf{g}(t,0) > 0, \mathbf{g}(t,\tau) > 0$. Производная вектор-функции $\mathbf{f}(\cdot)$ по векторной переменной $\mathbf{z}(t)$ не зависит явно

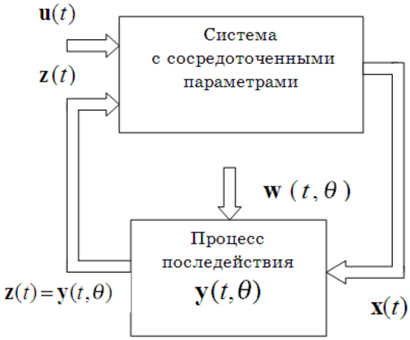

Рис. 1 – Схема системы с последействием

от вектора управления $\mathbf{u}(t)$. Допустимые кусочно-непрерывные управления $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{w}(t,\theta)$ принимают значения в заданных выпуклых областях $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{w} \in W$. Можно показать, что для заданных векторов допустимых управлений $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{w}(t,\theta)$ траектории $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t,\theta)$ однозначно определяются своими начальными и граничными условиями.

Использование метода фиктивной координаты покажем на примере решения задачи оптимального управления отопительной системой производственного помещения (рис. 2).

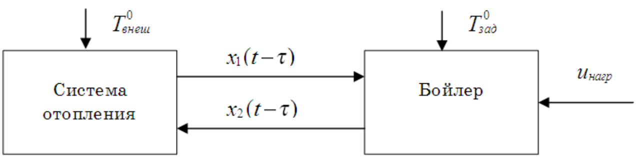

Рис. 2 – Система управления температурой с последействием

Отопительная система работает следующим образом. Температура в батареях отопления регулируется путем подогрева в бойлере и циркуляции жидкости между батареями отопления и бойлером. Учитывая потери тепловой энергии в батареях отопления и в процессе теплоотдачи циркулирующей по трубам жидкости, можем записать следующую систему дифференциально-разностных уравнений с последействием:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= k_1[x_1(t) - T^0_{внеш}] + k_2[x_2(t-\tau) - x_1(t)], \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= k_u u_{нагр} - k_3[x_2(t) - x_1(t-\tau)] \end{aligned} \qquad (7)$$

ISSN 1560-8956

при заданных граничных условиях:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0,$$

$$x_1(T) = x_2(T) = T^0_{зад}.$$

Цель оптимального управления состоит в том, чтобы в конечный момент времени $t = T$ при минимальных затратах вводимой тепловой энергии свести к минимуму отклонение температуры в батареях отопления от заданной температуры $T^0_{зад}$. Для такой постановки задачи функционал стоимости определяется выражением:

$$I = [x_1(T) - T^0_{зад}] + \int\limits_0^T c u^2_{нагр}(t) dt. \tag{8}$$

Также будем считать, что температура в батареях отопления и в бойлере на интервале времени $[-\tau, 0]$ равнялась нулю, что соответствует реальному состоянию отопительной системы помещения до начала работы.

Перейдем от записи (7) к записи вида (3)–(4):

$$\begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} = -k_1[x_1(t) - T^0_{внеш}] + k_2[z_2(t) - x_1(t)], \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = k_u u_{нагр} - k_3[x_2(t) - z_1(t)], \\ \frac{dy_1(t,\theta)}{dt} + k_4 \frac{dy_1(t,\theta)}{d\theta} = -k_5[y_1(t,\theta) - T^0_{внеш}], \\ \frac{dy_2(t,\theta)}{dt} + k_4 \frac{dy_2(t,\theta)}{d\theta} = -k_5[y_2(t,\theta) - T^0_{внеш}] \end{array} \tag{9}$$

при граничных условиях:

$$\begin{array}{l} y_1(0,\theta) = 0, y_2(0,\theta) = 0, \\ y_1(t,0) = x_1(t), y_2(t,0) = x_2(t), \end{array} \tag{10}$$

где: $z_1(t) = y_1(t,\theta)$, $z_2(t) = y_2(t,\theta)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ – температура соответственно в батареях отопления и в бойлере; $y_1(t,\theta)$ и $y_2(t,\theta)$ – температура в трубопроводах; $u_{нагр}$ – вводимое тепло ($0 \leqslant u_{нагр} \leqslant u_{max}$); $T^0_{внеш}$ – внешняя температура; k_i – константы. В качестве метода оптимизации воспользуемся принципом максимума [5].

Для уравнений системы (9) и (10) составим гамильтонианы:

$$\begin{array}{l} H_\psi = \psi_0 c u^2(t) + \psi_1[-k_1(x_1(t) - T^0_{внеш}) + \\ k_2(y_2(t,\tau) - x_1(t))] + \psi_2[k_u u_{нагр} - k_3(x_2(t) y_1(t,\tau), \end{array} \tag{11}$$

$$K_\psi = -\varphi_1 k_5[y_1(t,\theta) - T^0_{внеш}] - \psi_2 k_5[y_2(t,\tau) - T^0_{внеш}], \tag{12}$$

где ψ_i и φ_j – вспомогательные переменные.

В этом случае система сопряженных уравнений и граничные условия имеют вид:

$$\begin{array}{l} \frac{d\psi_0(t)}{dt} = 0, \frac{d\psi_1(t)}{dt} = (k_1 + k_2)\psi_1(t) - k_5\varphi_1(t,0), \\ \frac{d\psi_2(t)}{dt} = k_3\psi_2(t) - k_5\varphi_2(t,0), \\ \psi_0(T) = -c, \psi_1(T) = -2(x_1(T) - T^0_{зад}, \psi_2(T) = -0. \end{array} \tag{13}$$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + k_4\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} = k_5\varphi_1; \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + k_4\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} = k_5\varphi_2, \\ \varphi_1(t,\tau) = \frac{k_3}{k_4}\psi_2(t); \varphi_2(t,\tau) = \frac{k_2}{k_u}\psi_1(t), \\ \varphi_1(T,\theta) = 0; \varphi_2(T,\theta) = 0; t \in [0,T]; \theta \in [0,\tau]. \end{array} \tag{14}$$

Так как оптимальное управление должно обеспечивать максимум гамильтониана, следовательно

$$u^{opt}(t) = \begin{cases} 0, \text{если} \frac{k_u}{2c}\psi_2 < 0, \\ \frac{k_u}{2c}, \text{если} 0 < \frac{k_u}{2c} \leqslant u_{\max}, \\ u_{\max}, \text{если} \frac{k_u}{2c} > u_{\max}. \end{cases} \tag{15}$$

Для определения траектории ψ_2 необходимо, используя формулу оптимального управления (15), решить совместно вспомогательные уравнения (13), (14) и уравнения (9), (10). Совместное решение указанных уравнений является решением краевой задачи. В общем случае решение таких задач требует применения методов вычислительной математики [5].

В данном случае можно предложить следующую итерационную процедуру.

Шаг 1. Задать некоторое начальное значение $x_1(T)$ и вычислить $\psi_1(T) = 2 - 2(x_1(T) - T_0^{зад})$.

Шаг 2. Проинтегрировать сопряженную систему уравнений (13) в обратном времени от $t = T$ до $t = 0$ и определить $\psi_2(t)$ и $\psi_1(t)$.

Шаг 3. Из (15) определить $u^{опт}(t)$.

Шаг 4. Подставив найденное значение $u^{опт}(t)$ в (19) и проинтегрировав данную систему от $t = 0$ до $t = T$, определить новое значение $x_1(T)$.

Шаг 5. Если найденное значение $x_1(T)$ отличается от заданного первоначально, переходим к шагу 1. Если же они близки (с заданной степенью точности), то найденное управление является оптимальным.

Используя метод фиктивной координаты, описанный выше, системы с нестационарным запаздыванием, заданные дифференциально-разностным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau_1(t)), \mathbf{x}(t-\tau_2(t)), \ldots, \mathbf{x}(t-\tau_m(t))\mathbf{u}(t)) \tag{16}$$

можно также привести к виду

$$\begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}_1(t), \mathbf{z}_2(t), \ldots, \mathbf{z}_m(t), \mathbf{u}(t), t), \\ \frac{d\mathbf{y}_j(t,\theta_j)}{dt} + g_j(t,\theta_j)\frac{d\mathbf{y}_j(t,\theta_j)}{d\theta_j} = h_j(\mathbf{y}_j(t,\theta_j), \mathbf{w}_j(t,\theta_j), t, \theta_j) \end{array} \tag{17}$$

при $j = 1, m; t \in [0,T]; \theta_j \in [0,\tau_j]$ и начальными и граничными условиями

$$\begin{array}{l} \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(0), \\ \mathbf{y}_j(0,\theta_j) = \mathbf{y}_{j0}(\theta_j)\text{при}\theta_j \in [0,\tau_j], \\ \mathbf{y}_j(t,0) = \mathbf{x}(t)\text{при}t \in [0,T], \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{y}_j(t,\tau_j)t \in [0,T]; \theta_j \in [0,\tau_j] \end{array} \tag{18}$$

 ISSN 1560-8956

выбрав соответствующим образом функции $g_j^(t, \theta)$и$h_j^(t, \theta)$

$$\begin{aligned} &g_j(t, \theta_j(t)) = \frac{\tau_j(t) - \theta_j(t)\frac{d\tau_j(t)}{dt}}{\tau_j(t)}, \\ &h_j(t, \theta_j(t)) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Эквивалентность соотношений (16), (17) и (18), (19) следует из условий $\mathbf{y}_j^(t, \theta_j) = x(t - \theta_j \tau_j(t)), j = 1, m.$

Заключение

Предложенный метод фиктивной координаты позволяет применить стандартный аппарат методов оптимизации к системам с последействием, заменив последнюю эквивалентной ей системой обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, в которых отсутствует чистое запаздывание.

Литература

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. – 732с.
2. Костюк В.И., Стенин А.А., Игнатенко В.Н. Оптимальное по расходу топлива управление системами с последействием. (англ.). Сб. System Science, Poland,v.3, №2, 1977, p.159 -169.
3. Стенин А.А. Оптимальное по расходу топлива управление системами второго порядка с последействием при фиксированном времени перехода. Сб. Вестник КПИ, серия "Техническая кибернетика". Вып. 1, 1977, с. 11-13.
4. Чаки Ф. Современная теория управления. М.: Мир, 1975.– 820 с.
5. Фельдман Л.П., Петренко А.I., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.
6. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.

Отримано 17.05.2012 р.