УДК 621.924.229.86

А.Г. Кику, О.И. Кику

# СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

*Аннотация:* В статье предложен подход решения задач аналитического конструирования оптимальных регуляторов динамических объектов без упоминания известного принципа оптимальности Беллмана. Подход основан по существу на свойстве интегральных критериев качества, а именно на независимости их значений от произвольного разделения интервалов интегрирования на отдельные части. В статье доказано, что на базе упомянутого свойства интегральных мер качества возможен синтез алгоритма генерации управляющих воздействий, удовлетворяющих требуемым, в том числе и оптимальным значениям критериев качества.

*Ключевые слова:* оптимальный регулятор, динамические объекты, управлющие воздействия.

Пусть рассматривается динамический оператор, заданный следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i[x(t), u(t), t], \;\; i \in [\overline{1, n}], \; x(t_1) = x^1, \tag{1}$$

где $x = [x_1, \ldots, x_n]$ – вектор переменных состояния, а $u = [u_1, \ldots, u_r]$ – вектор возмущений.

Пусть качество преобразования (1) оценивается при помощи следующей интегральной меры:

$$I[x(t), u(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t), u(t), t)]dt + l[x(t_2)] \tag{2}$$

Пусть необходимо найти алгоритм генерации возмущений $u^{Ж}$, обеспечивающих желаемое значение критерия (2).

Решение указанной задачи естественным образом зависит от свойств меры (2). Попытаемся найти ее решение на основе независимости интегральных мер вида (2) от произвольного разделения интервала интегрирования $[t_1, t_2]$ промежуточной точкой $t \in [t_1, t_2]$ на две части.

Представим выражение (2) следующим образом:

$$\begin{aligned} I[x(t), u(t)] &= \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t), u(t), t)]dt + l[x(t_2)] = \\ &= \int\limits_{t_{1_1}}^{t} f(x, u, t)dt + \int\limits_{t_{1_1}}^{t_2} f(x, u, t)dt + l[x(t_2)] = \, , \\ &= \int\limits_{t_{1_1}}^{t_2} f(x, u, t)dt + S(t) \end{aligned} \tag{3}$$

где



 ISSN 1562-9945

$$S(t) = \int_{t_{1_1}}^{t_2} f[x(t), u(t), t)] + l[x(t_2)]. \qquad (4)$$

Условие независимости функционала (3) от промежуточной точки $t$ деления интервала $[t_1, t_2]$ на две части может быть представлено следующим образом:

$$I_t = \frac{dI}{dt} = 0. \qquad (5)$$

С учетом (4) это условие принимает вид:

$$f(x, u, t) + \frac{dS}{dt} = 0 \qquad (6)$$

или в расширенной форме

$$f(x,u,t)+\frac{dS}{dt} = f(x,u,t)+\sum_{i=1}^{n} \frac{\vartheta S}{\vartheta x_i}\frac{dx_i}{dx_i}+\frac{\vartheta S}{\vartheta x_i} = f(x,u,t)+\sum_{i=1}^{n} S_{x_i}\frac{dx_i}{dx_i}+S_{\vartheta t} = 0. \qquad (7)$$

Полученное условие имеет принципиальное значение. Действительно, если оператор (1) позволяет определить вектор $x(t)$ при известном возмущении $u(t)$, то условие (7) позволяет определить о возмущение $u^{Ж}(t)$, обеспечивающее желаемый вектора переменных состояния$x^{Ж}(t)$.

Например, пусть $x^{Ж}(t)$ представляет собой оптимальный вектор $x^{Ж}(t) = x^* = \arg\{\frac{opt}{u} I\}$.

Тогда условие (7) с учетом модели динамического оператора (1) принимает следующий вид

$$-S^*_{\vartheta t} = \frac{opt}{u}\{f(x^*, u, t) + \sum_{i=1}^{n} S_{x_i}\varphi_i((x^*, u, t) \qquad (8)$$

Таким образом, условие независимости интегральных мер качества от точек деления их интервала интегрирования на две может быть представлено в полученном виде (8).

Выражение (8) позволяют определить оптимальное возмущение $u^*(t)$при условии, что вектор переменных состояния $x(t)$ является оптимальным. При этом заметим, что если будет выполнено условие $u(t) = u^*$, то будет выполнено также условие $x(t) = x^*$!

Из вышеприведенного вытекает процедура синтеза алгоритма генерации оптимального возмущения динамических операторов с точки зрения интегральных критериев качества, которая имеет следующий вид:

1) item На основе правой части выражения (8) определяем вектор $u^*(t)$:

$$u^* = \frac{opt}{u}\{f(x^*, u, t) + \sum_{i=1}^{n} S_{x_i}\varphi_i((x^*, u, t) \qquad (9)$$

При этом заметим, что оптимальный вектор возмущения дифференциального оператора (1) окажется зависимым от требуемого оптимального вектора переменных состояния и от функционала $S$, т.е.:

$$u^* = u^*(x^\circ, S) \tag{10}$$

2) Полученный вектор оптимальных возмущений $u^* = u^*(x^\circ, S)$ подставляем в выражение (8), после чего оно принимает соответственно вид:

$$-S^*_{\vartheta t} = f\{x^*, u^*[x^*, S^*(x^*, t]\} + \sum_{i=1}^{n} S_{x_i}\varphi_i(x^*, u^*[x^*, S^*(x^*, t], t) \tag{11}$$

3) На основе дифференциального уравнения (11) находим функционал $S^x$ в виде функции оптимального вектора переменных состояния $x^*$

$$S^* = S^*(x^{\cdot}, t). \tag{12}$$

Для фиксации решения дифференциального уравнения в частных производных (11) имеются условия функционал $S^x$ на правой границе, которые согласно (4) равны

$$S^*(t_2) = l[x(t_2)] \tag{13}$$

4) Постановкой $S^* = S^*(x^{\cdot}, t)$ в (10), окончательно находим алгоритм генерирования оптимального возмущения динамического оператора (1)

$$u^* = u^*[x^*, S^*(x^*, t)] = u^*(x^*, t) \tag{14}$$

Постановкой (13) в (1) последнее принимает следующий вид:

$$\frac{dx_i^*}{dt} = \varphi_i\{x^*(t), u^*[x^*(t)], t\} = \varphi_i\{x^*(t), u^*[x^*(t)], t\},\ i \in [1,\bar{}n],\ x(t_1) = x^1. \tag{15}$$

Из полученных результатов вытекают следующие выводы:

1) Если подынтегральное выражение функционала (2) не претерпевает разрывов второго рода, то на составляющие выражения (11) не накладываются ограничения их непрерывности по своим аргументам.

2) Для формирования оптимального возмущения $u^*(t)$ при любом $t$ алгоритму достаточна информация в виде вектора $x^*$.

2) Оператор (15) генерации оптимального вектора переменных состояния $x^*$ представляет собой последовательное соединение алгебраического оператора (14) и исходного динамического оператора (1).

$$x^*(t)x^*(t_1) = x(t_1) = x^1 u^*(t)x^*(t)$$

Для оперативной генерации оптимального вектора состояния необходим алгоритм (15) необходимо “замыкать” на себя (на рис. 2. БОПС – блок определения оценок $\hat{x}$ переменных состояния).

 ISSN 1562-9945

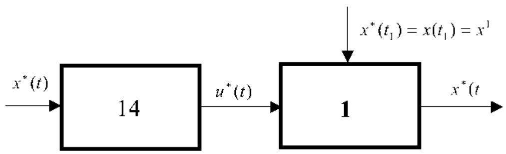


Рис. 1 – Разомкнутая структура генерации оптимального вектора переменных состояния

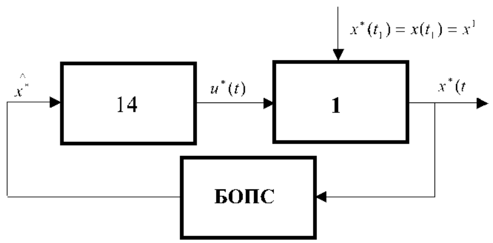


Рис. 2 – Замкнутая структура генерации оптимального вектора переменных состояния

4) Система дифференциальных уравнений, генерирующих оптимальный вектор $x^*$, согласно (15) превращается в однородную систему однородных дифференциальных уравнений, которая может “стартовать” только в начале интервала времени $[t_1, t_2]$, так как только при $t = t_1$ известен вектор $x(t_1) = x^1$!

5) Порядок системы дифференциальных уравнений (14), генерирующей оптимальный вектор $x^*$, совпадает с порядком системы дифференциальных уравнений (1), генерирующий вектор $x(t)$.

6) Характеристики алгоритма определения оптимального возмущения $u^*$ зависят как от характеристик оператора, генерирующего вектор $x$, так и от характеристик меры оптимальности.

7) Основная трудность определения алгоритма оптимального возмущения $u^*$ связана с определением функционала $S$, который согласно (13) находится путем интегрирования в “обратном времени”.

Полученный результат, очевидно, может быть использован для решения задач оптимального управления. При этом его использование приводит к известному методу динамического программирования, вытекающего из так называемого принципа оптимальности Беллмана. В методе динамического программирования функционал $S$ назван функцией Беллмана, а уравнение (11) – дифференциальным уравнением Беллмана. Но здесь алгоритм оптимального управления здесь найден без упоминания принципа оптимальности Беллмана. Отсюда вытекает, что естественным образом так называемый принцип оптимальности Беллмана является следствием свойства независимости интегральных мер от разделения интервала интегрирования да де части. Таким образом, отсюда вытекает, что принцип оптимальности по существу не является принципом.

## Литература

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М, Фомин С.В. Оптимальное управление // Москва: Наука, 1979.- с. 429.
2. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами // Москва: Радио и связь, 1982.- с. 396.

Отримано 08.12.2009 р.