

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ УСИЛЕНИЯ ФИЛЬТРОВ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Аннотация: В статье разработан улучшенный метод определения оценок переменных состояния динамических объектов на основе внедрения дополнительной матрицы усиления в контур стандартного фильтра Калмана. Приведена соответствующая постановка задачи фильтрации, процедура определения оптимальных коэффициентов дополнительной матрицы усиления фильтра, результаты экспериментальных исследований, которые доказывают значительно большую эффективность предложенного фильтра по сравнению с эффективностью стандартного фильтра Калмана.

Ключевые слова: динамический объект, оценка переменных состояния, фильтрация.

В статье приведен метод улучшения эффективности оценок переменных состояния динамических объектов на основе внедрения дополнительной матрицы усиления в контур фильтрации и выбора ее оптимальных параметров.

Стандартная калмановская постановка задачи фильтрации не обеспечивает оптимальную эффективность полученных на ее основе оценок $\hat{x}(t)$ переменных состояния $x(t)$ объекта, так как в нее отсутствует влияние рассогласования $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$ начальных условий переменных состояния объекта и фильтра. Действительно, так как фильтр Калмана является динамической моделью, то указанное рассогласование приводит к свободной составляющей $\varepsilon_{cu}(t)$ погрешности оценок переменных состояния, равной:

$$\varepsilon_{cu}(t) = \Phi(t)\varepsilon_{cu}(0), \quad (1)$$

где $\Phi(t)$ - переходная матрица фильтра. При этом составляющая $\varepsilon_{cu}(t)$ регулярна по структуре и случайна по амплитуде. Таким образом, суммарная дисперсия σ_{Σ}^2 ошибок оценок переменных состояния зависит как от характеристик помех на входе объекта $w(t)$ и выходе измерителя $v(t)$, так и от рассогласования начальных условий $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$. Отсюда следует, что при линейности фильтра и некоррелированности $w(t)$, $v(t)$ и $\varepsilon(0)$ суммарная дисперсия оценок переменных состояния будет равна

$$\sigma_{\Sigma}^2 = \sigma_{x_0}^2 + \sigma_{xw}^2 + \sigma_{xv}^2, \quad (2)$$

где $\sigma_{xw}^2, \sigma_{xv}^2, \sigma_{x_0}^2$ - составляющие суммарной дисперсии, зависящие от $w(t)$, $v(t)$ и $\varepsilon(0)$, соответственно. Таким образом, фильтр Калмана, синтезированный на основе стандартной постановки задачи фильтрации, оптимален лишь в случае отсутствия рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра.

Из вышеуказанного вытекает, что оптимальный фильтр может быть синтезирован на основе корректной постановке задачи фильтрации, учитывающее влияние всех приведенных составляющих $\sigma_{xw}^2, \sigma_{xw}^2, \sigma_{x0}^2$ на эффективность оценок $\hat{x}(t)$ переменных состояния $x(t)$. Подобная постановка задачи фильтрации переменных состояния линейных динамических объектов общего вида при белых помехах может быть сформулирована следующим образом:

$$\hat{x}^* = \arg \left\{ \frac{\min}{\hat{x}} [\sigma_{x0}^2 + tr P_\varepsilon(t)] \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) + G(t)w(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) + v(t), \\ M\hat{x} = Mx(t), Mw(t) = 0, Mv(t) = 0, \\ Cov[w(t), w(\tau)] = Q\delta(t - \tau), \\ Cov[v(t), v(\tau)] = R\delta(t - \tau), \\ Cov[w(t), v(\tau)] = 0, \\ Cov[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = P_0, \end{array} \right\}, \quad (3)$$

Структура фильтра: линейная

где, $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ - вектора переменных состояния, $\hat{x} = [\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n]^T$ - вектор их оценок, $u = [u_1, \dots, u_r]^T$ - вектор входных воздействий объекта, $y = [y_1, \dots, y_l]^T$ - вектор выходной величины объекта, A, B, C, D, M - матрицы состояния, входа, выхода и обхода объекта, операторы математического ожидания и ковариации, Q, R - дисперсии помех w и v , $\delta(t)$ - функция Дирака, P_0 -ковариационная матрица оценок $\hat{x}(t)$ при $t = 0$, $tr P_\varepsilon$ - след ковариационной матрицы P_ε ошибки фильтрации $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Для объектов обычного вида матрица D в выражении (3) равна нулю.

Аналитическое решение задачи (3) в общем виде затруднено или невозможно. В этой статье приводится эвристический подход ее приближенного решения. Этот подход имеет полупараметрический характер и основан на следующих соображениях. Показатели качества процесса уменьшения влияния рассогласования начальных условий переменных состояния объекта и фильтра на эффективность оценок зависят от общей матрицы усиления $K(t)$ фильтра. Отсюда вытекает, что требуемые показатели качества указанного процесса могут быть достигнуты путем изменения матрицы усиления $K_K(t)$ стандартного фильтра Калмана. Это может быть достигнуто внедрением в контур усиления последнего дополнительной матрицы усиления, структура которой имеет следующий вид:

$$K_D(K_O, \alpha, \beta, t) = K_{DO}e^{\alpha t} \cos \beta t + E. \quad (4)$$

После выполнения указанного мероприятия матрица усиления матрица усиления фильтра примет вид:

$$K = K_K(K_Oe^{\alpha t} \cos \beta t + E). \quad (5)$$

Как видно из (5), при $t \rightarrow \infty$ матрица усиления предложенного фильтра стремится к матрице стандартного фильтра Калмана.

В выражении (4) K_O внедрено для обеспечения требуемой скорости убывания составляющей $\varepsilon_{cu}(t)$ при “малых” значениях t , α - для обеспечения устойчивости фильтра и требуемой скорости выхода его матрицы усиления к калмановскому виду, β -для компенсации возможных колебаний процесса фильтрации.

При указанном подходе постановка задачи фильтрации (3) приводится к следующему полупараметрическому виду:

$$\hat{x}^* = \arg\left\{ \frac{\min}{K_0, \alpha, \beta} [\sigma_{x0}^2 + tr P_\varepsilon(t)] \left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) + G(t)w(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) + v(t), \\ M\hat{x} = Mx(t), Mw(t) = 0, Mv(t) = 0, \\ Cov[w(t), w(\tau)] = Q\delta(t - \tau), \\ Cov[v(t), v(\tau)] = R\delta(t - \tau), \\ Cov[w(t), v(\tau)] = 0, Cov[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = P_0, \\ Cov[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = P_0, \\ K = K_K(K_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t + E), \\ K_K - \text{матрица усиления} \\ \text{фильтра Калмана} \end{array} \right\}, \right. \quad (6)$$

где матрицы усиления $K_K(t)$ стандартного фильтра Калмана определяются на основе стандартной калмановской постановки задачи фильтрации:

$$\hat{x}^* = \arg\left\{ \frac{\min}{\hat{x}} tr P_\varepsilon(t) \left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) + G(t)w(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) + v(t), \\ M\hat{x} = Mx(t), Mw(t) = 0, Mv(t) = 0, \\ Cov[w(t), w(\tau)] = Q\delta(t - \tau), Cov[v(t), v(\tau)] = R\delta(t - \tau), \\ Cov[w(t), v(\tau)] = 0, Cov[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = P_0 \end{array} \right\} \right. \quad (7)$$

Согласно приведенному, процедура синтеза улучшенных фильтров переменных состояния на основе предложенного подхода содержит два этапа.

Этап 1: Синтез стандартного фильтра Калмана на основе постановки задачи фильтрации (5).

Этап 2: Решение параметрической задачи (4), результате которого будут определены оптимальные параметры K_0^*, α^*, β^* дополнительной матрицы усиления K_D .

Оптимальные значения параметров K_0^*, α^*, β^* дополнительной матрицы усиления K_D могут быть определены при помощи итерационных процедур.

Структурные схемы улучшенного фильтра переменных состояния для объектов обычного и общего вида, синтезированного на основе предложенного подхода, имеет вид, представленный на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

Эффективность предложенного подхода синтеза улучшенных фильтров переменных состояния было исследовано путем их компьютерного

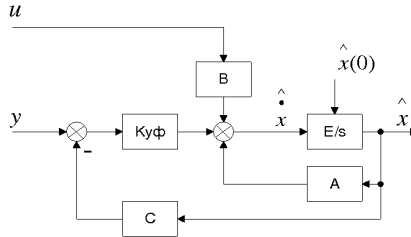


Рис. 1 – Рисунок 1.- Структурная схема улучшенного фильтра переменных состояния для объектов обычного вида

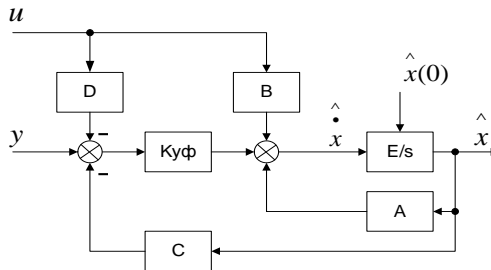


Рис. 2 – Структурная схема улучшенного фильтра переменных состояния для объектов общего вида

моделирования. Ниже приведены результаты экспериментальных исследований при следующих условиях:

1. Модель объекта;
2. Структура дополнительной матрицы усиления: $K_D(K_O, \alpha) = K_O e^{\alpha t} + E$
3. Критерии оценки степени эффективности фильтрации переменных состояния.

Графики результатов моделирования имеют следующий вид:

Полученные результаты убедительно показывают, что качество фильтрации переменных состояния динамических объектов с использованием в контуре фильтрации дополнительной матрицы значительно превышает качество фильтрации переменных состояния динамических объектов с использованием стандартного фильтра Калмана.

Литература

1. Kalman R.E. The theory of Optimal Control and the Calculus of Variations. Mathematical Optimization Techniques // University of California Press , Berkeley – 1963.

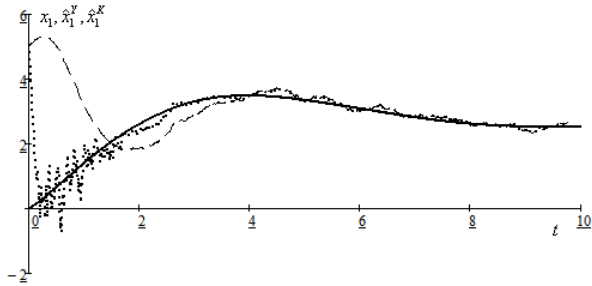


Рис. 3 – Графики 1-й переменной состояния, калмановской и улучшенной оценок (сплошная, пунктирная и точечная линии соответственно)

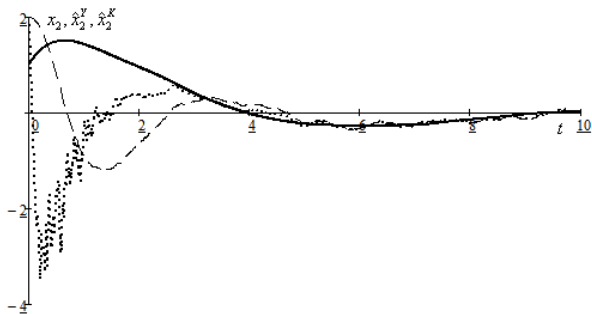


Рис. 4 – Графики 2-й переменной состояния, калмановской и улучшенной оценок (сплошная, пунктирная и точечная линии соответственно)

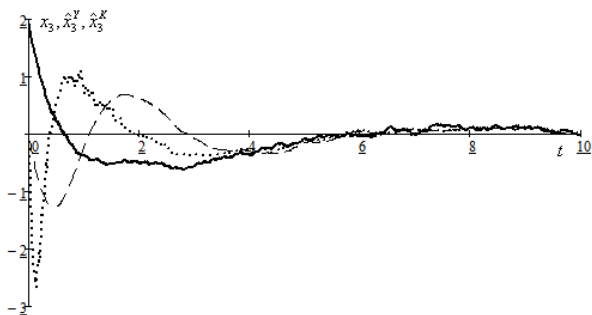


Рис. 5 – Графики 3-й переменной состояния, калмановской и улучшенной оценок (сплошная, пунктирная и точечная линии соответственно).

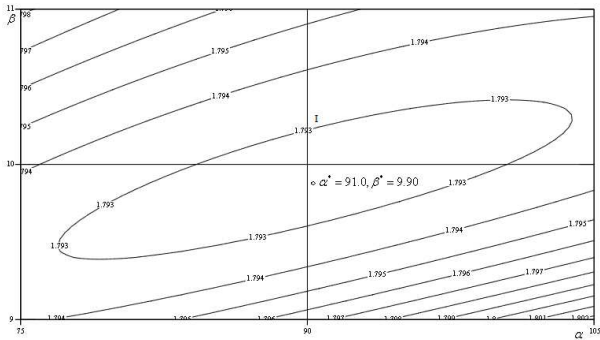


Рис. 6 – График зависимости критерия качества I от параметров α^*, β^* дополнительной матрицы усиления K_D .

2. Кикю А.Г., Рева Е.Ю. Компенсация влияния рассогласования начальных условий фильтров переменных состояния // Адаптивные системы автоматического управления.-2006.- 9 (29).
3. Кикю А.Г., Рева Е.Ю. Синтез укороченных моделей динамических объектов // Адаптивные системы автоматического управления.-2008.- 13 (33).
4. Рева Е.Ю. Улучшение винеровской фильтрации переменных состояния объектов общего вида // Адаптивные системы автоматического управления.-2009.- 14 (34).

Отримано 10.12.2009 р.