УДК 004.896

Е.Ю. Мелкумян

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГЛАДКОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТРАЕКТОРИИ ОТВЕТСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ ПУТЕМ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Аннотация: Для ряда актуальных новых задач робототехники необходимо обеспечить непрерывную аппроксимацию динамики центра масс ответственных элементов изделия в многомерном фазовом пространстве скоростей и координат всех звеньев многозвенного технического устройства. В работе рассмотрена задача восстановления гладкой пространственной траектории ответственных элементов робототехнических комплексов путем сплайн-интерполяции конечного множества ее 3D-точек, зарегистрированных дистанционно.

Ключевые слова: сплайн-интерполяция, робототехника, пространственная траектория.

Для ряда актуальных новых задач робототехники (включая дистанционное управление беспилотным летательным аппаратом (БПЛА), оптимальное управление сложными многозвенными манипуляторами для промышленных роботов, экстремальной робототехники, интеллектуальной медицинской бытовой техники и других новых приложений) необходимо обеспечить непрерывную аппроксимацию динамики центра масс ответственных элементов изделия в многомерном фазовом пространстве скоростей и координат всех звеньев многозвенного технического устройства.

Пример 1. Для 6-звенного манипулятора с единственной степенью свободы в каждом звене получаем 18-мерное пространство текущих координат. Если же интересоваться еще и количеством ориентационных степеней такого 6-звенного манипулятора, то получаем уже до 24 измерений фазового пространства. Если же добавить еще информацию о текущей скорости каждого звена, то добавляется еще 18 степеней свободы. Так что общее количество степеней свобод координат центра масс, ориентации ответственных узлов и скоростей каждого звена может достигать 42 степени свободы.

Частные случаи промышленных роботов для повышения эффективности производства рассмотрены в работах [1,2]. Развитие робототехники [3-5] требует разработку многозвенных манипуляторов с элементами искусственного интеллекта для экстремальных задач. В данной работе преследуется следующий этап, который активно развивается. Задача восстановления гладкой пространственной траектории ответственных элементов робототехнических комплексов путем сплайн-интерполяции конечного множества ее 3D-точек, зарегистрированных дистанционно, является актуальной для многозвенных манипуляторов, медицинских роботов ухода за пациентами, БПЛА, самонаводящихся робототехнических комплексов, антропоморфных роботов для различных специальных задач и др.

Чтобы обеспечить оптимальное управление в динамике многозвенным манипулятором, необходимо решать бортовым компьютером автономного робототехнического устройства систему уравнений движения, задав начальные и краевые условия, вытекающие из предыстории движения в предельном случае в этом многомерном пространстве (в примере 1 размерность фазового пространства достигает 42).

Для построения непрерывной аппроксимации динамики центра масс ответственных элементов изделия в многомерном фазовом пространстве скоростей и координат всех звеньев многозвенного технического устройства в реальных условиях необходимо получать и в реальном времени обрабатывать текущую записываемую информацию в файл с данными необходимых степеней свобод с некоторым шагом Δt по времени в течение всего рабочего интервала для данного многозвенного робототехнического устройства. Например, это может быть получение множества М трехмерных координат центра масс объекта $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в течение выполнения всего задания по заданному маршруту, а также текущих параметров ориентации трех осей объекта управления как твердого тела (например, углы Эйлера-Крылова ψ, ν, γ). Тогда скорости интересующих ответственных звеньев можно будет рассчитать по данным множества М.

В работе предлагается для поставленной цели использовать трехмерный кубический сплайн дефекта 1 на временной сетке типа “скользящее окно”. Более конкретно будет рассмотрен алгоритм интерполяции со сглаживанием выпуклыми кубическими сплайнами при оптимизации концевых условий. С помощью сплайнов можно построить соприкасающуюся плоскость, соприкасающуюся окружность и главную нормаль к траектории, которые тесно связаны с динамикой трех углов Эйлера звеньев манипулятора, представляющих особый интерес.

Интерполяции со сглаживанием выпуклыми кубическими сплайнами при оптимизации концевых условий

Для важных практических приложений к оптимальному управлению многозвенными манипуляторами рассмотрим математическую задачу и соответствующий алгоритм интерполяции со сглаживанием выпуклыми кубическими сплайнами при оптимизации концевых условий.

Для многих задач робототехники и машиностроения необходимо восстанавливать гладкую функцию по информации о ее значениях y_i, $i = \overline{1, N}$ в некоторых точках x_i, $i = \overline{1, N}$ области ее определения $[a, b]$ в ситуации, когда эти значения y_i известны из эксперимента с некоторой случайной ошибкой ε_i. При восстановлении искомой гладкой функции $y = f\,(x)$ в таких условиях обычно ставится задача отыскания такого эле-

 ISSN 1562-9945

мента $f(x) \in \boldsymbol{\Phi} \subset \boldsymbol{C}^{1}[a,b]$, который обеспечивает наибольшую близость $(N+1)$-мерного вектора $f(x_i)$, $i=\overline{1,N}$ к заданному вектору y_i, $i=\overline{1,N}$ в смысле минимальности расстояния:

$$\rho(y,f) \equiv \sum_{i=0}^{N} p_i \left| y_i - f(x_i) \right|^2 \to \min \qquad (1)$$
$$f \in \Phi$$

В качестве функционального пространства Φ в (1) обычно выбирается такое подпространство из $\boldsymbol{C}^{1}[a,b]$, чьи элементы обладают хорошими вычислительными свойствами. Поставленная задача называется интерполяцией со сглаживанием или сглаживанием на классе функций $f \in \boldsymbol{\Phi}$.

В большом числе конкретных задач интерполяции наиболее привлекательным классом Φ функций оказывается класс кусочно-полиномиальных функций или сплайнов. В частности, использование сплайнов приводит к достаточно простому алгоритму восстановления решения задачи сглаживания (1), сводящемуся к обращению матрицы ленточного типа, хорошо реализуемому на компьютере. Сплайнам присуща также большая универсальность и гибкость в задачах интерполяции, аппроксимации и приближенного решения нелинейных операторных уравнений. Это во многом обусловлено тем, что сплайны оказываются решениями некоторых экстремальных задач на классах гладких функций [6]. По указанным причинам метод сплайнов как разновидность метода конечных элементов в последние годы приобрел большую популярность во многих задачах вычислительной и прикладной математики.

В настоящей работе рассматривается задача интерполяции кубическими сплайнами дефекта 1, а поэтому напомним определение таких объектов.

Определение. Непериодическим интерполяционным кубическим сплайном дефекта 1 называется функция $S_\Delta(y;x)$, непрерывная вместе с производными до второй включительно, заданная на отрезке $[a,b]$, интерполирующая вещественные значения $\{y_i\}_0^N$ в узлах сетки Δ вида:

$$\Delta : a = x_0 \leqslant x_1 < \ldots < x_N = b; \quad S_\Delta(y;x_i) = y_j, \quad j=\overline{0,N},$$

совпадающая с некоторым полиномом $\pi_{3,j}$ третьей степени на интервале $[x_{j-1},x_j]$, $j=\overline{1,N}$ и удовлетворяющая концевым условиям:

$$2\frac{d^2 S_\Delta(y;x_0)}{dx^2} + \lambda_0 \frac{d^2 S_\Delta(y;x_1)}{dx^2} = d_0 \qquad \text{(2a)}$$

$$\mu_N \frac{d^2 S_\Delta(y;x_{N-1})}{dx^2} + 2\frac{d^2 S_\Delta(y;x_N)}{dx^2} = d_N, \qquad \text{(2b)}$$

где λ_0, μ_N,d_0, d_N – заданные вещественные числа.

Кубические сплайны для целей интерполяции со сглаживанием, по-видимому, впервые использованы Шенбергом в задаче о минимизации функционала [6,7]:

$$\alpha \int_a^b \left|f''(x)\right|^2 dx + \sum_{i=0}^{N} p_i \left[f(x_i) - y_i\right]^2,\ p > 0,\ i = \overline{0,N}, \alpha > 0 \tag{3}$$

В известной литературе по сглаживанию кубическими сплайнами рассматривались фиксированные концевые условия типа (2), по которым варьирование не проводится. Вместе с тем в разнообразных задачах физики, аэро– и гидромеханики возникает необходимость сгладить исходные экспериментальные данные так, чтобы полученная кривая была достаточно гладкой, при том всюду выпуклой кверху (либо всюду выпуклой книзу), тогда как концевые условия (2) могут быть произвольными. Для таких ситуаций естественно приходим к задаче интерполяции со сглаживанием в классе выпуклых функций (например, выпуклых кубических сплайнов) как вариационной задаче по минимизации функционала типа (1) либо (3) при варьировании концевых условий формы (2). Подобная задача изучена в литературе весьма слабо. Ниже будет подробно изучена следующая конкретизация задачи сглаживания выпуклыми сплайнами.

Постановка задачи. Необходимо найти минимум функционала (1) в классе интерполяционных кубических сплайнов дефекта 1, заданных на сетке Δ: $a = x_0 \leqslant x_1 < \ldots < x_N = b$ при варьировании концевых условий (2) и обеспечении условия выпуклости книзу:

$$\frac{d^2 S_\Delta(f;x)}{dx^2} \leqslant 0,\ x \in [a,b] \tag{4}$$

Следуя работам [6] и [7] исследуем разрешимость этой задачи, для чего произведем некоторые предварительные построения. Отметим, что определенный выше интерполяционный кубический сплайн дефекта 1 (или просто кубический сплайн) $S_\Delta(y;x)$ на каждом частичном интервале $[x_{j-1}, x_j]$, как известно [6], легко представить в виде

$$S_\Delta(y;x) = M_{j-1}\frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6}\right)\frac{x_j - x}{h_j} +$$
$$+ \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6}\right)\frac{x - x_{j-1}}{h_j},$$

где вектор-столбец моментов $M = \{M_0, M_1, \ldots, M_N\} \in R_N$ определяется как решение системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=0}^{M} A_{ij} M_j = d_j,\ i = \overline{0,N},\ A_{ij} \equiv A_{ij}(\lambda_0, \mu_N; N, \Delta), \tag{5}$$

$$d_j = \sum_{k=0}^{N} D_{ik} y_k = 6\left[(y_{i+1} - y_i)h_{i+1}^{-1} - (y_i - y_{i-1})h_i^{-1}\right](h_i + h_{i+1})^{-1} \tag{6}$$

где $i = \overline{1, N-1}$; $h_j = x_j - x_{j-1}$, а матрица А имеет вид:

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \lambda_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_N & 2 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_j = h_{j+1}\left(h_j + h_{j+1}\right)^{-1}; \mu_j = h_j\left(h_j + h_{j+1}\right)^{-1}; i = \overline{0, N}.$$

Доказано [6], что для $|\lambda_0| < 2$ и $|\mu_N| < 2$ решение системы (5) существует и оно единственно (и при этом трех диагональная матрица $A \equiv A(\lambda_0, \mu_N; N, \Delta)$ неособенная, т.е. имеет единственную обратную матрицу A^{-1}). $\{h_i\}_1^N$, и вычисление моментов $\{M_j\}_0^N$ осуществляется эффективно с помощью компьютера методом прогонки. Вместе с тем, для изучения разрешимости поставленной задачи сглаживания выпуклыми кубическими сплайнами при оптимизации концевых условий необходимо получить явное представление для всех элементов матрицы A^{-1} как функций переменных $\{y_i\}_1^N$, $\{h_i\}_1^N$ при заданном N.

Выводы

Имея гладкую кривую траектории, можно получить соприкасающуюся плоскость, соприкасающуюся окружность и главную нормаль к траектории, которые тесно связаны с динамикой трех углов Эйлера звеньев манипулятора, представляющих особый интерес для оптимального управления движения. Примеру восстановления гладкой пространственной траектории ответственных элементов робототехнических комплексов путем сплайн-интерполяции конечного множества ее 3D-точек, зарегистрированных дистанционно, будет посвящена специальная работа.

Литература

1. Промышленная робототехника / Л.С.Ямпольский, В.А.Яхимович, Е.Г.Вайсман и др.; Под ред. Л.С.Ямпольского. - К.: “Техніка”, 1984. – 264 с.
2. Ямпольский Л.С., Ткач М.М., Костюк В.И. Технологическая подготовка роботизированного производства. – К.: Вища шк.. Изд-во при Киев. Ун-те, 1984. – 72 с.
3. Писаренко В.Г., Писаренко Ю.В. Вопросы виртуального проектирования систем, ориентированных на создание интеллектуализированных роботов для мониторинга экстремальных состояний техносферы. Часть 1 // УСиМ. – Киев. – 2005. – 4. – С. 8-18.
4. V.G. Pisarenko, I.A.Varava, Ju.V. Pisarenko, V.I. Prokopchuk. Information models for robotics systems with intellectual sensor and self-organization. Proceeding of XI-th Intern. Conference Knowledge-Dialog-Solution KDS-2005, Varna, 2005. – P. 30-35.

5. Панасюк Ю.Я., Писаренко В.Г., Писаренко Ю.В. Перспективы (точки роста) интеллектуальной мобильной робототехники и системы автономного распознавания базовых навигационных образов // “Искусственный интеллект”, 2008, 3. – С. 390-397.

6. Алберг Дж., Нельсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир. – 1972. – 316 с.

7. Писаренко В.Г. Об интерполяции со сглаживанием выпуклыми кубическими сплайнами при оптимизации концевых условия // Сборник “физика и механика нелинейных явлений”. – К.: “Наукова думка”. – 1976. – С. 10-18.

Отримано 07.12.2009 р.