УДК 621-501.72

В.П. Пасько, А.А. Стенин, П.С. Хоменко

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ "ИДЕАЛЬНОМ" ОПЕРАТОРЕ В КОНТУРЕ УПРАВЛЕНИЯ

Аннотация: Рассмотрена задача синтеза оптимальных законов движения линейных стационарных моделей технологических процессов. Полученный динамический режим в дальнейшем может быть использован для оценки действий оператора при работе на учебном тренажере.

Ключевые слова: синтез законов движения, технологические процессы, оператор.

Введение

Проблема совершенствования операторской деятельности приобрела особую остроту в системах управления сложными технологическими процессами и объектами. Наиболее эффективным техническим средством обучения операторов различного рода профессиональной деятельности являются тренажеры, которые находят все более широкое применение в энергетике, авиастроении и других отраслях народного хозяйства, в частности, для подготовки операторов энергоблоков, турбин и других объектов, характеризующихся сложностью задач управления [3].

В рассматриваемых системах, как правило, действия человека-оператора строго регламентируются инструкциями по управляющим воздействиям для типовых ситуаций. В общем случае учебная задача, поставленная перед оператором, состоит в отработке на тренажере двух видов режимов управления:

- перевод объектов управления из одного состояния в другое;
- стабилизация объекта управления относительно заданного состояния.

Как в том, так и в другом случае требуется определить оптимальный в смысле некоторого критерия качества закон управления, реализующий эталонный динамический режим.

В дальнейшем полученный режим будет использован в формировании значений частных и обобщенных критериев оценки действий оператора путем сравнения эталонных параметров с текущими, полученными в процессе отработки тех или иных учебных задач. Реализация эталонных динамических режимов осуществляется на базе методов оптимального управления.

Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную полностью управляемую систему, движение которой описывается уравнением

$$\begin{aligned}&\dot{\bar{x}} = \mathrm{A}\bar{x} + \mathrm{B}u;\\ &\bar{y} = \mathrm{C}\bar{x}\end{aligned}\quad , \tag{1}$$

где $\bar{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор состояний; $\bar{y}^T = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – измеряемый выходной вектор; u – скалярное воздействие; A, B, C – матрицы коэффициентов размерностью $n \times n$, $n \times 1$, $m \times n$ соответственно, причем $0 < m \leqslant n$.

В данном случае рассмотрение скалярного управления оправдано, так как в режиме стабилизации оператор, как правило, работает с одним органом управления. Кроме того, будем считать, что он идеально справляется со своими обязанностями, т.е. $W_M = k$.

Известно [1,2], что для полностью измеряемых ($m = n, c = I$) систем вида (1) в случае квадратичного критерия качества экстремальное управление и является линейной функцией состояния

$$u = \bar{p}^T \bar{x}, \tag{2}$$

причем вектор коэффициентов обратных связей $\bar{p}$ можно выбрать таким образом, что полюсы замкнутой системы (1) будут располагаться в наперед заданных произвольных точках, обеспечивающих требуемые динамические свойства.

Таким образом, задача сводится к выбору оптимальной области расположения полюсов и определению по ним коэффициентов обратных связей.

Синтез оптимальных законов движения

Предположив вначале, что полюсы заранее известны, покажем метод определения таких коэффициентов p_i, $\left(i = \overline{1, n}\right)$, которые линейно входят в выражение для коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы:

$$\mathrm{H}(\lambda) = \left|A + B\bar{p}^T - I\lambda\right| = \left|\begin{array}{c} a_{11} + b_1 p_1^{-\lambda} \ldots a_{1j} + b_1 p_j \ldots a_{1n} + b_1 p_n \\ \cdots \\ a_{j1} + b_j p_1 \ldots a_{jj} + b_j p_j^{-\lambda} \ldots a_{jn} + b_j p_n \\ a_{n1} + b_n p_1 \ldots a_{nj} + b_n p_j \ldots a_{nn} + b_n p_n^{-\lambda} \end{array}\right|. \tag{3}$$

Действительно, пусть $\exists b_k / b_k \neq 0$. Тогда, вычитая из j-й строки k-ю $(j \neq k)$, умноженную на b_j / b_k, получим определитель, равный исходному (3), в котором коэффициенты обратных связей p_i , $\left(i = \overline{1, n}\right)$ входят в k-ю строку. Раскрывая его по этой строке и группируя члены при соответствующих степенях λ, приходим окончательно к следующему выражению:

 ISSN 1562-9945

$$\mathrm{H}(\lambda) = \lambda^n + \left(\sum_{i=1}^{n} c_{n-1,i} p_i + d_{n-1} \right) \lambda^{n-1} + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} c_{0,i} p_i + d_0 \right)$$

или

$$\mathrm{H}(\lambda) = \lambda^n + \left(\bar{c}_{n-1}^T \bar{p} + d_{n-1} \right) \lambda^{n-1} + \ldots + \left(\bar{c}_0^T \bar{p} + d_0 \right). \tag{4}$$

Неизвестные параметры c_{ji}, $d_j (j = \overline{0, n-1}; i = \overline{1, n})$ определяем за $n+1$ шаг методом неопределенных коэффициентов. Для этого на первом шаге, полагая $p_i = 0 (i = \overline{1, n})$ в определителе (3) и раскрывая его одним из известных методов [4], находим, что найденные коэффициенты при различных степенях λ, определяют неизвестные коэффициенты $d_j (j = \overline{0, n-1})$ выражения (4) при соответствующих степенях λ. На последующих n шагах, полагая поочередно один из коэффициентов $p_i (i = \overline{1, n})$ равным единице при остальных нулевых и раскрывая определитель (3), получаем выражения для неизвестного параметра c_{ji} при соответствующей степени $\lambda^j (j = \overline{0, n-1})$ в виде

$$c_{ji} = f_j - d_i, \tag{5}$$

где f_j – коэффициент при λ_j в i-м раскрытом характеристическом определителе. Характеристический полином замкнутой системы (1) с желаемыми корнями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ имеет вид:

$$\mathrm{F}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = \sum_{j=0}^{n-1} w_j \lambda^j + \lambda^n. \tag{6}$$

В результате для определения коэффициентов обратных связей получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\mathrm{col} \left(\bar{c}^T, \bar{c}^T, \ldots, \bar{c}^T \right) \bar{p} = \bar{w} - \bar{d}, \tag{7}$$

где $\bar{w} = (w_{n-1}, w_{n-1}, \ldots, w_0)$, $\bar{d} = (d_{n-1}, d_{n-2}, \ldots, d_0)$.

Построение и коррекция спектра желаемых корней

Полученное распределение корней при желании можно скорректировать следующим образом. В окрестности точек p_i, $\left(i = \overline{1, m}\right)$ вычисляем частные производные корней характеристического многочлена (4) по обратным связям, т.е. определяем матрицу

$$I_{np} = \left\| \frac{\Delta k_i}{\Delta p_j} \right\| \begin{array}{l} i = \overline{1, 2n} \\ j = \overline{1, m} \end{array},$$

где Δk_i – приращение действительной или мнимой части корня при изменении обратной связи на Δp_j.

Величину коррекции обратных связей получим, решив систему линейных алгебраических уравнений

$$\Delta \bar{k} = \mathrm{I}_{np}^m \Delta \bar{p},$$

где I_{np}^{m} – матрица, состоящая из m строк матрицы I_{np}, соответствующих корректируемым корням; $\Delta\bar{k}$ – величина желаемой коррекции корней; $\Delta\bar{p}$ – требуемая величина коррекции обратных связей.

В результате новый вектор коэффициентов обратных связей $\overline{p_{(1)}}$ определится по формуле:

$$\overline{p_{(1)}} = \overline{p_{(0)}} + \Delta\overline{p},$$

где $\overline{p_{(0)}}$ – вектор коэффициентов обратных связей до коррекции.

Определение коэффициентов обратных связей происходило в предположении, что известны полюсы $\lambda_i (i = \overline{1, n})$, влияющие на динамические свойства замкнутой системы.

Качественные показатели таких систем определяются в основном расположением ближайших к началу координат корней характеристического полинома, называемых доминирующими, а также взаимным расположением остальных корней.

Как правило, в режиме стабилизации качество управления объектом определяется временем переходного процесса $t_{n.n}$ и степенью затухания этого процесса

$$\xi = \frac{x_j(t_{n.n})}{x_j(t_0)} < 1 \ (j = \overline{1, n}), \tag{8}$$

где x_j – элементы вектора состояния $\bar{x}$.

Если $\lambda_0 = \varepsilon_0 + i\omega_0$ – доминирующий корень, то решение системы (1) можно приближенно записать в виде

$$x_j = x_j(t_0) e^{\varepsilon_0 i} \cos(\omega_0 t + j_i), \ (j = \overline{1, n}). \tag{9}$$

Из уравнения (9) с учетом выражения (8) получаем

$$\frac{x_j(t_{n.n.})}{x_j(t_0)} \leqslant e^{\varepsilon_0 t_{n.n.}} \leqslant \xi,$$

откуда $\varepsilon_0 \leqslant \frac{\ln \xi}{t_{n.n.}} < 0$.

Величину мнимой части ω_0 выбираем равной $l/t_{n.n}$. При этом за время переходного процесса переменная $x_j\,(t)$ совершит одно колебание вокруг положения равновесия и будет стремиться к нему с противоположной относительно начального возмущения стороны, что весьма желательно по физическим соображениям.

Во избежание перерегулирования остальные корни характеристического полинома следует размещать возможно ближе к доминирующим с выполнением условий

$$\begin{array}{l} \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots, \\ |\varepsilon_0| < |\varepsilon_1| < |\varepsilon_2| < \ldots \end{array}, \tag{10a}$$

чтобы составляющие с большой колебательностью затухали быстрее

$$|\lambda_k| - |\lambda_{k-1}| > 0,1\left(|\lambda_k|\right), \tag{10b}$$

и чтобы корни не сливались в кратные.

 ISSN 1562-9945

Для уменьшения времени переходного процесса желательно располагать корни на комплексной плоскости как можно левее. Однако ограничения на переменные состояния накладывают определенные ограничения и на модули корней.

Учитывая запись (9) записываем

$$x_j = \frac{d}{dt}x_j = \sqrt{\omega^2+\varepsilon^2}x\left(t_0\right)e^{\varepsilon t}\cos\left(\omega t + j_{j1}\right) = \max\sqrt{\omega^2+\varepsilon^2}x_j\left(t_0\right). \quad (11)$$

Каждое j-е уравнение системы (1) порождает две верхние границы модулей корней характеристического полинома, вызванные одним и тем же ограничением на левую и правую части j-го уравнения системы (1).

С учетом выражения (11) определяем для левой части j-го уравнения системы (1), что

$$\max_t \max_\lambda x_j = \sqrt{\omega^2+\varepsilon^2}x_j\left(t_0\right)e^{\varepsilon t}\cos\left(\omega t + j_{j1}\right) = \max\sqrt{\omega^2+\varepsilon^2}x_j\left(t_0\right). \quad (12)$$

Для правой части:

$$\max_t \max_\lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|a_{ji}x_i\left(t_0\right)\right|. \quad (13)$$

Сравнивая выражения (12) и (13), ввиду отсутствия явной зависимости неравенства (13) от модуля корней можем записать следующее неравенство:

$$\max_\lambda \sqrt{\omega^2+\varepsilon^2} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_{ji}x_i(t_0)\right|}{x_j(t_0)}. \quad (14)$$

Наиболее жесткое из ограничений вида (14) даст левую границу расположения корней характеристического полинома. При этом стремление ε к увеличению для ускорения затухания процесса происходит к минимизации ω с учетом выражений (10а) и (10б).

Расположение корней может быть скорректировано после моделирования переходного процесса, исходя из наложенных на переменные состояния ограничений, путем изменения коэффициентов характеристического полинома.

Пусть на j-ю переменную состояния наложено ограничение $|x_j| \leqslant x_j^{зад}$. При моделировании получим $\max|x_j| \leqslant x_j^{зад}$. В этом случае путем умножения коэффициентов характеристического полинома при первой степени на величину $[x_j^{зад}/x_j]$ гомотетично сдвигаем все корни относительно начала координат (согласно теореме Виета) с коэффициентом гомотетии $x_j^{зад}/x_j$. Также, согласно выражению (12) изменится значение $\max|x_j|$. Таким образом, решается задача выбора оптимальной области расположения полюсов и определения по ним коэффициентов обратных связей.

Заключение

Предложенная процедура синтеза линейных замкнутых систем позволяет обеспечить требуемые динамические свойства технологического процесса с целью дальнейшего использования для оценивания действий оператора.

Литература

1. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление, "Машиностроение" М., 1968, 764 с.
2. Квакернаак А., Сиван Р Линейные оптимальные системы уравнения, "Мир", 1977. – 653 с.
3. Дозорцев В.М. Компьютреные тренажеры для обучения операторов технологических процессов, "Синтег", 2009. – 372 с.
4. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ, "Мир" М., 1989, 655 с.

Отримано 16.12.2009 р.