

УДК 519.816:519.24:519.854.2

О.А. Павлов, І.О. Зенів, В.В. Кобельский

МАТЕМАТИЧНЕ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ КОЛЕКТИВНОГО ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Анотація: Розглядається проблема прийняття рішень в умовах невизначеності колективом експертів, рівень професійності яких вважається однаковим. Викладені результати є розвитком підходу, запропонованого О.А. Павловим та його учнями, який полягає в використанні моделей комбінаторної оптимізації для обробки емпіричної матриці парних порівнянь одного експерта. Використання оптимізаційних моделей дозволило розширити область застосування підходу, розробленого Т. Сааті, на випадок достатньо великої кількості альтернатив та коли емпірична матриця парних порівнянь є частково заповненою. Пропонується отримані результати узагальнити на випадок обробки сукупності емпіричних матриць парних порівнянь, заповнених незалежними один від одного експертами однакового або різного рівня професійності. Для цього запропоновано в термінах теорії ймовірності дві моделі експертів та формалізація рівня їх професійності. Це дозволило теоретично обґрунтувати ефективну процедуру обробки сукупності емпіричних матриць парних порівнянь, а також статистично дослідити властивості використаних моделей комбінаторної оптимізації для знаходження оцінок кількісних характеристик якості альтернатив, серед яких треба виділити найкращу в умовах відсутності формальної моделі оцінки якості альтернативи.

Ключові слова: прийняття рішень в умовах невизначеності, емпірична матриця парних порівнянь, задача комбінаторної оптимізації, статистичне імітаційне моделювання.

1. Вступ

Проблема прийняття рішень в умовах невизначеності включає в себе наступну дуже важливу практичну задачу, яка полягає в знаходженні найкращої альтернативи в умовах відсутності формальної моделі оцінки її якості. Інформацією, що використовується для розв'язання цієї задачі, є результати експертного оцінювання експерта чи групи експертів. Існують різні підходи до розв'язання цієї задачі [1, 2, 3]. Найбільш ефективним, на думку авторів, є підхід до обробки емпіричної матриці парних порівнянь (МПП), запропонований Т. Сааті з використанням теореми Фробеніуса–Перрона. Основна ідея полягає в наступному.

Нехай $\Gamma = (\gamma_{ij})^n$ – емпірична МПП, де γ_{ij} – відповідь експерта на питання, у скільки разів ω_i – невідома кількісна характеристика якості i -ї альтернативи – біль-

ше ω_j . Якщо $\forall \gamma_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}$, то має місце матрична рівність

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega_1}{\omega_1} & \frac{\omega_1}{\omega_2} & \dots & \frac{\omega_1}{\omega_n} \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} & \frac{\omega_2}{\omega_2} & \ddots & \frac{\omega_2}{\omega_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_n}{\omega_1} & \frac{\omega_n}{\omega_2} & \dots & \frac{\omega_n}{\omega_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Якщо $\forall \omega_i > 0$, то матриця Γ є матрицею Фробеніуса і за теоремою Фробеніуса–Перрона пара $n, (\omega_1, \dots, \omega_n)^T$ єдина, з точністю до довільного додатного коефіцієнта пропорційності, на який можна помножити всі компоненти вектора $(\omega_1, \dots, \omega_n)^T$. В цьому випадку емпірична МПП називається повністю узгодженою. Якщо додатне власне число γ_Γ^* при додатному власному векторі матриці Γ не дорівнює n , то воно більше, ніж n [2], і різниця $\gamma_\Gamma^* - n$ є мірою узгодженості (точності) емпіричної МПП.

Основні недоліки класичного методу Т. Сааті обробки емпіричної МПП: необхідність достатньо точного розв'язку алгебраїчного рівняння n -го ступеню для знаходження γ_Γ^* ; невеликий (не більше 10) розмір матриці Γ ; матриця Γ обов'язково повинна бути повністю заповненою; і, нарешті, індивідуальні емпіричні МПП можуть бути погано узгодженими, але може існувати алгоритмічна процедура, що дозволяє достатньо точно знайти коефіцієнти $\omega_i, i = \overline{1, n}$ (див. пп. 5.3, 5.4). Як показали [4, 5] проф. О.А. Павлов та його учні, недоліків класичного методу Т. Сааті можна уникнути, якщо використати для знаходження ваг $\omega_i, i = \overline{1, n}$, моделі комбінаторної оптимізації. В цьому дослідженні будуть приведені в термінах теорії ймовірностей дві оригінальні моделі експерта, моделі експертів однакового та різного професійного рівня, що дозволило, по-перше, шляхом статистичного імітаційного моделювання дослідити ефективність використання моделей комбінаторної оптимізації обробки емпіричних МПП експертів однакової та різної кваліфікації; по-друге, оцінити використання не повністю заповнених МПП; по-третє, привести теоретично обґрунтовану алгоритмічну процедуру знаходження оцінок вагових коефіцієнтів $\omega_i > 0, i = \overline{1, n}$, по сукупності емпіричних МПП, заповнених незалежними один від одного експертами однакового та різного професійного рівня.

2. Основні теоретичні положення, що використовуються в даній роботі

Нехай Γ – емпірична МПП. Тоді, відповідно до [4, 5], алгоритмічна процедура знаходження оцінок $\omega_i > 0, i = \overline{1, n}$, полягає в наступному.

Перший крок. Розв'язуються наступні чотири задачі лінійного програмування (ЗЛП):

$$\min \sum_{(i,j \in |\Gamma|)} r_{ij}^l y_{ij}; \quad (2)$$

$$-y_{ij} \leq \omega_i - y_{ij}\omega_j \leq y_{ij}, y_{ij} \geq 0, \omega_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \omega_i = 1, \quad (3)$$

де змінними l -ї ЗЛП ($l = \overline{1, 4}$) $\in \forall y_{ij}, \omega_i, i, j = \overline{1, n}$, $|\Gamma|$ – це множина всіх пар (i, j) , $i \neq j$, яким відповідають всі елементи матриці Γ таких, що $\gamma_{ij} \geq 1$. Фіксовані вагові коефіцієнти r_{ij}^l приймають наступні значення:

$$\begin{aligned} \forall r_{ij}^1 &= 1; \\ \forall r_{ij}^2 &= \frac{1}{\gamma_{ij}-1}, \gamma_{ij} > 1, r_{ij}^2 = 1 \text{ при } \gamma_{ij} = 1; \\ \forall r_{ij}^3 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_{ij}-1}}, \gamma_{ij} > 1, r_{ij}^3 = 1 \text{ при } \gamma_{ij} = 1; \\ \forall r_{ij}^4 &= \frac{1}{\sqrt[3]{(\gamma_{ij}-1)^2}}, \gamma_{ij} > 1, r_{ij}^4 = 1 \text{ при } \gamma_{ij} = 1. \end{aligned}$$

Примітка 1. Як показали статистичні дослідження [4], статистично найбільш ефективною є модель 7 [4, розділ 7], яка полягає в рекурентній реалізації множини спеціальних ЗЛП. Модель 7 [4] не приводиться в силу її надмірної громіздкості.

Другий крок [4]. Нехай $\widehat{\omega}^l = (\omega_1^l, \dots, \omega_n^l)^T, l = \overline{1, 5}$, – це п'ять векторів оцінок компонент невідомого додатного вектора $\bar{\omega}$. В якості розв'язку задачі вибирається вектор $\bar{\omega}$, на якому досягається мінімум

$$\min_{l=\overline{1,5}} \sum_{(i,j \in |\Gamma|)} \frac{1}{\gamma_{ij}} \left| \gamma_{ij} - \frac{\omega_i^l}{\omega_j^l} \right|. \quad (4)$$

Третій крок. Перевірка стійкості отриманого вектора оцінок $\widehat{\omega}$ [4]. Випадковим чином моделюються M ($M \geq 100$) штучних МПП, у кожній з яких для $\gamma_{ij}^t, t = \overline{1, M}, \forall i \neq j$, виконуються умови

$$\gamma_{ij}^t - \frac{\widehat{\omega}_i}{\widehat{\omega}_j} = \pm \left| \gamma_{ij} - \frac{\widehat{\omega}_i}{\widehat{\omega}_j} \right|, \quad (5)$$

де γ_{ij} – елементи реальної емпіричної МПП Γ .

Примітка 2. В формулі (5) «+» чи «-» реалізується з ймовірністю 0.5.

Для кожної штучно згенерованої матриці $\Gamma^t, t = \overline{1, M}$, з використанням моделі комбінаторної оптимізації, розв'язком якої є $\widehat{\omega}$, знаходимо вектор оцінок $\widehat{\omega}^l, l = \overline{1, M}$. Як показано в [6], якщо $\forall l d(\widehat{\omega}^l, \widehat{\omega}) \in [0, 0.02]$, де

$$d(\widehat{\omega}^l, \widehat{\omega}) = \left\| \frac{\widehat{\omega}^l}{\|\widehat{\omega}^l\|} - \frac{\widehat{\omega}}{\|\widehat{\omega}\|} \right\|, \|x\| = + \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (6)$$

то вектор оцінок $\widehat{\omega}$ є обґрунтованим розв'язком задачі прийняття рішень в умовах невизначеності.

Примітка 3. Умова $\forall l d(\widehat{\omega}^l, \widehat{\omega}) \in [0, 0.02]$ гарантує практично точне знаходження значень невідомих коефіцієнтів $\omega_i > 0, i = \overline{1, n}$. В [4, 5] показано, що оцінка невідомих вагових коефіцієнтів $\omega_i > 0, i = \overline{1, n}$, знаходиться з достатньою точністю, якщо $\forall l d(\widehat{\omega}^l, \widehat{\omega}) \in [0, 0.12]$.

3. Основні наукові результати

Метою даного наукового дослідження є створення в термінах теорії ймовірностей моделей професійного експерта, які б дозволили шляхом проведення статистично обґрунтованого імітаційного моделювання дослідити ефективність моделей комбінаторної оптимізації для знаходження оцінок компонент невідомого додатного вектора ω по емпіричній МПП одного експерта чи групи експертів однакового або різного рівня професійності.

3.1. Перша модель професійного експерта

Нехай $\omega_i > 0, i = \overline{1, n}$, – невідомі коефіцієнти, що характеризують якість відповідної альтернативи. Тоді професійність експерта задається числом $k_1, 0 \leq k_1 < 1$, а коефіцієнти γ_{ij} – елементи МПП – є дискретними випадковими величинами, що задаються таблицями

$$\forall_{i \neq j} \gamma_{ij} \sim \begin{pmatrix} \frac{\omega_i}{\omega_j} + k_1 \frac{\omega_i}{\omega_j} & \frac{\omega_i}{\omega_j} - k_1 \frac{\omega_i}{\omega_j} \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad \forall_{i \neq j} \frac{\omega_i}{\omega_j} \geq 1. \quad (7)$$

3.2. Друга модель професійного експерта

Рівень професійності експерта задається неперервною випадковою величиною K , що має рівномірний розподіл на відрізку $(-k_2, k_2), 0 \leq k_2 < 1$, а компоненти γ_{ij} МПП є наступними неперервними випадковими величинами:

$$\forall_{i \neq j} \gamma_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j} + K \frac{\omega_i}{\omega_j}, \quad \forall_{i \neq j} \frac{\omega_i}{\omega_j} \geq 1. \quad (8)$$

Примітка 4. В першій і другій моделях $\forall_{i \neq j} \frac{\omega_i}{\omega_j} \geq 1$, так як в комбінаторних моделях (2), (3), 7 [4] використовуються лише $\gamma_{ij} \geq 1 \forall i \neq j$.

3.3. Модель незалежних професійних експертів однакового рівня професійності

Модель має m експертів однакової професійності, що незалежно один від одного заповнюють емпіричні МПП. Тоді коефіцієнти $\gamma_{ij}^l, l = \overline{1, m}$, їх МПП є незалежними випадковими величинами, що мають однаковий розподіл (7) чи (8), в залежності від вибраної моделі експерта, тобто $\forall l$ k_1 чи k_2 однакові.

m МПП $\Gamma_l, l = \overline{1, m}$, замінюємо однією Γ з коефіцієнтами

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \gamma_{ij}^l, \quad M\gamma_{ij}^l = \frac{\omega_i}{\omega_j}, \quad D\gamma_{ij}^l = \text{const}. \quad (9)$$

Тоді має місце очевидне твердження:

$$D\gamma_{ij} = \frac{D\gamma_{ij}^l}{m}. \quad (10)$$

Наслідок 1. Оцінка (10) залишається справедливою для будь-яких однакових розподілів незалежних випадкових величин γ_{ij}^l , у яких $\forall_{i \neq j} M\gamma_{ij}^l = \frac{\omega_i}{\omega_j}, l = \overline{1, m}$.

Наслідок 2. Нехай $\forall_{i,j,l} M\gamma_{ij}^l = \frac{\omega_i}{\omega_j}$, але дисперсії $D\gamma_{ij}^l = D_{ij}^l$ різні. Розташуємо їх в порядку незростання: $D_{ij}^{l_1} \geq D_{ij}^{l_2} \geq \dots D_{ij}^{l_m}$. Тоді

$$D \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \gamma_{ij}^l \leq \frac{1}{m} (D_{ij}^{l_1} + (m-1)D_{ij}^{l_2}) \quad (11)$$

Наслідок 3. Очевидно, що більшому значенню коефіцієнтів k_1 чи k_2 відповідає більше значення $D\gamma_{ij}^l$.

На думку авторів, перша і друга моделі експертів є найбільш логічними, причому перша модель є найбільш «жорсткою», та її статистично обґрунтовані оцінки ефективності можуть вважатися відповідними верхніми оцінками якості отриманих результатів.

З аналізу твердження та його наслідків випливає алгоритм знаходження оцінок $\omega_i > 0, i = \overline{1, n}$, за результатами опитування незалежних експертів однакової чи різної професійності, що відповідають умовам Наслідку 2 до твердження. В результаті незалежного опитування отримуємо m емпіричних МПП – m реалізацій випадкових матриць $\Gamma_l, l = \overline{1, m}$. Замінюємо їх об'єднаною матрицею, кожний ij -й елемент якої є середнім арифметичним відповідних елементів реалізацій випадкових матриць $\Gamma_l, l = \overline{1, m}$. Оцінки невідомих коефіцієнтів $\omega_i > 0, i = \overline{1, n}$, знаходяться по об'єднаній матриці алгоритмом, викладеним в п. 2.

4. Методологія статистичного імітаційного моделювання для знаходження статистично обґрунтованих характеристик ефективності знаходження оцінок $\omega_i > 0, i = \overline{1, n}$, алгоритмом (п. 2) для повністю чи частково заповнених МПП

Примітка 5. Для спрощення будемо вважати, що при реалізації групового опитування всі реалізації емпіричних МПП вважаються повністю чи однаково частково заповненими.

4.1. Дослідження ефективності комбінаторних моделей обробки реалізацій випадкової емпіричної МПП одного експерта, що відповідає першій та другій ви- падковим моделям

Для фіксованих параметрів $n = 15$, значення справжніх вагових коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0.125; \omega_2 = 0.116667; \omega_3 = 0.108333; \omega_4 = 0.1; \omega_5 = 0.091667; \\ \omega_6 &= 0.083333; \omega_7 = 0.075; \omega_8 = 0.066667; \omega_9 = 0.058333; \omega_{10} = 0.05; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{11} &= 0.041667; \omega_{12} = 0.033333; \omega_{13} = 0.025; \omega_{14} = 0.016667; \\ \omega_{15} &= 0.008333, \sum_{i=1}^{15} \omega_i = 1.\end{aligned}\quad (12)$$

Таким чином, відношення ω_1 до ω_{15} дорівнює 15. $\forall_i \frac{\omega_i}{\omega_{i+1}} \approx \text{const}$. Коефіцієнти k_1, k_2 змінювались від 0.01 до 0.9. При фіксованому значенні k_1, k_2 реалізовувалось по десять експериментів знаходження оцінок ваг $\omega_i, i = \overline{1, 15}$.

Для двох випадкових моделей експерта при повністю заповненій емпіричній МПП знаходились максимальні значення k_1, k_2 , при яких ще статистично обґрунтовано гарантувалося виконання умови $d(\hat{\omega}, \omega) \in [0, 0.02]$. Така сама задача розв'язувалася для не повністю заповненої випадкової емпіричної МПП, причому множина індексів заповнених $\gamma_{ij} (i \neq j)$ обов'язково містить множину $\{1, 2, \dots, 15\}$.

Проведення порівняльного аналізу отриманих результатів див. пп. 4.2, 4.3.

4.2. Статистичне дослідження ефективності знаходження оцінок $\omega_i, i = \overline{1, 15}$, по повністю заповненим реалізаціям десяти випадкових незалежних МПП експертів однакової професійності

В цьому випадку для першої та другої моделі, відповідно, реалізації випадкових матриць замінюються об'єднаною матрицею за правилом $\forall_{i \neq j} \hat{\gamma}_{ij} = \frac{1}{10} \sum_{l=1}^{10} \hat{\gamma}_{ij}^l$.

Для двох таким чином отриманих об'єднаних МПП (для першої та другої моделі) проводяться статистичні дослідження, що описані в пп. 4.1.

4.3. Статистичне дослідження реалізацій випадкових емпіричних МПП експертів різного рівня професійності

В цьому випадку для двох випадкових моделей десяти незалежних експертів знаходився рівень максимальної непрофесійності одного експерта та відповідний йому мінімальний рівень професійності всіх інших експертів, при якому ще виконується умова $d(\hat{\omega}, \omega) \in [0, 0.02]$, тобто отримуються практично достовірні оцінки.

Примітка 6. При використанні комбінаторних моделей обробки однієї реалізації випадкової емпіричної МПП (індивідуальної чи об'єднаної) генерувались по 100 штучних МПП (див. формулу (5)).

5. Результати статистичних досліджень

При фіксованих значеннях коефіцієнтів $k_1 \in [0, 1), k_2 \in [0, 1)$ (випадкові перша та друга моделі експерта) генерувались по десять їх реалізацій і по кожній реалізації знаходилась оцінка коефіцієнтів $\omega_i, i = \overline{1, 15}$, значення яких приведені в (12). При знаходженні оцінок за допомогою моделей комбінаторної оптимізації по кожній реалізації

всіх випадкових МПП (індивідуальних чи об'єднаної) число M – кількість штучно згенерованих емпіричних МПП (5) – дорівнювала 100.

В якості результатів, наведених нижче, бралися найбільші значення коефіцієнтів k_1, k_2 , при яких всі десять оцінок $d(\hat{\omega}, \omega) \in [0, 0.02]$.

5.1. Статистичне дослідження індивідуальної випадкової матриці одного експерта

Перша модель. Приклад 1 для $k_1 = 0.07$, $d(\hat{\omega}, \omega) \in [0, 0.02]$, див. табл. 1 (а).

Друга модель. Приклад 2 для $k_2 = 0.09$, $d(\hat{\omega}, \omega) \in [0, 0.02]$, див. табл. 1 (б).

Таблиця 1

а) Приклад 1		б) Приклад 2	
ω	$\hat{\omega}$	ω	$\hat{\omega}$
0.125	0.128029	0.125	0.124121
0.116667	0.111676	0.116667	0.118635
0.108333	0.110959	0.108333	0.106501
0.1	0.102423	0.1	0.102107
0.091667	0.093888	0.091667	0.092843
0.083333	0.085353	0.083333	0.082949
0.075	0.071792	0.075	0.074482
0.066667	0.063815	0.066667	0.065476
0.058333	0.059747	0.058333	0.056896
0.05	0.047861	0.05	0.050875
0.041667	0.039884	0.041667	0.041619
0.033333	0.034309	0.033333	0.032493
0.025	0.023931	0.025	0.026108
0.016667	0.018355	0.016667	0.016877
0.008333	0.007977	0.008333	0.008018
$k_1 = 0.07$	$d(\hat{\omega}, \omega) =$ $= 6.809314459703172 \cdot 10^{-16}$	$k_2 = 0.09$	$d(\hat{\omega}, \omega) =$ $= 0.002291182052940964$

Для першої моделі отримали $k_1 \leq 0.07$, для другої $k_2 \leq 0.09$.

5.2. Не повністю заповнена МПП

Розглядалися не повністю заповнені випадкові МПП, у яких кількість незаповнених елементів в множині $|\Gamma|$ (2) бралися менше, ніж $\frac{n^2-n}{4}$ для $n = 15$.

Примітка 7. В цьому випадку статистично гарантовано оцінки коефіцієнтів $\omega_i, i = \overline{1, n}$, знайдені за допомогою комбінаторних моделей по повністю чи частково заповненій емпіричній МПП, практично збігаються. В протилежному випадку, можна отримати недостовірні результати. Як приклад, розглянемо граничний випадок.

$$|\Gamma| = \{\gamma_{12}, \gamma_{23}, \dots, \gamma_{(n-1)n}, \gamma_{n1}\}, \quad (13)$$

де $\gamma_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}$, де $\omega_i > 0$ – довільні числа, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$, що не мають нічого спільного зі значеннями справжніх ваг. В цьому випадку використання комбінаторних моделей приведе до абсурдного результату $\widehat{\omega}_i = \overline{\omega}_i, i = \overline{1, n}$.

Як і у випадку пп. 5.1, для всіх $k_1 \leq 0.08, k_2 \leq 0.1, d(\widehat{\omega}, \omega) \in [0, 0.02]$.

5.3. Об'єднана випадкова емпірична матриця незалежних експертів однакової професійності

Генерувалися реалізації десяти незалежних випадкових емпіричних МПП експертів однакової професійності (k_1, k_2 однакові для кожного експерта). В експериментах значення k_1, k_2 змінювались від 0.1 до 0.9 з кроком 0.1.

Перша випадкова модель об'єднаної емпіричної МПП. Виявилось, що для $k_1 \leq 0.5$ міра оцінок $d(\widehat{\omega}, \omega)$ для всіх реалізацій об'єднаної випадкової емпіричної МПП належить відрізка $[0, 0.02]$. Тобто, оцінка $\widehat{\omega}$ з використанням комбінаторних моделей по реалізації індивідуальної емпіричної МПП одного експерта може бути незадовільною (оцінка гарантує точність при $k_1 \leq 0.07$), але реалізація об'єднаної випадкової емпіричної МПП експертів, професійність яких на порядок нижча, дає практично достовірний результат.

Приклад 3. Для десяти реалізацій незалежних випадкових МПП при $k_1 = 0.5$ отримали:

$$\begin{aligned} d(\widehat{\omega}_1, \omega) &= 0.1871913966944804; & d(\widehat{\omega}_2, \omega) &= 0.15614087871480928; \\ d(\widehat{\omega}_3, \omega) &= 0.1505176403803559; & d(\widehat{\omega}_4, \omega) &= 0.09524595242629391; \\ d(\widehat{\omega}_5, \omega) &= 0.1102283383624778; & d(\widehat{\omega}_6, \omega) &= 0.34201096128503344; \\ d(\widehat{\omega}_7, \omega) &= 0.08980521273835411; & d(\widehat{\omega}_8, \omega) &= 0.11124726181641477; \\ d(\widehat{\omega}_9, \omega) &= 0.22161253416679105; & d(\widehat{\omega}_{10}, \omega) &= 0.20648537024918542. \end{aligned}$$

Об'єднана матриця по десяти реалізаціям незалежних випадкових емпіричних МПП при $k_1 = 0.5$ для кожної матриці дозволила отримати оцінки: $\widehat{\omega}_1 = 0.127619$; $\widehat{\omega}_2 = 0.119111$; $\widehat{\omega}_3 = 0.100548$; $\widehat{\omega}_4 = 0.091886$; $\widehat{\omega}_5 = 0.901074$; $\widehat{\omega}_6 = 0.085079$; $\widehat{\omega}_7 = 0.068914$; $\widehat{\omega}_8 = 0.068063$; $\widehat{\omega}_9 = 0.059555$; $\widehat{\omega}_{10} = 0.056719$; $\widehat{\omega}_{11} = 0.038672$; $\widehat{\omega}_{12} = 0.034032$; $\widehat{\omega}_{13} = 0.025524$; $\widehat{\omega}_{14} = 0.015469$; $\widehat{\omega}_{15} = 0.007734$; $d(\widehat{\omega}, \omega) \in [0, 1.1244915926984924 \cdot 10^{-15}]$.

Друга модель. Максимально великий коефіцієнт непрофесійності k_2 , при якому гарантується практично достовірна оцінка $d(\hat{\omega}, \omega) \in [0, 0.02]$, дорівнює 0.8 (порівняйте з $k_2 = 0.09$ для випадкової матриці одного експерта пп. 5.1).

5.4. Об'єднана випадкова емпірична МПП десяти незалежних експертів різного рівня професійності

Перша модель. Граничні рівні професійності (тобто значення $0 \leq k_1 < 1$) наступні: Якщо рівень непрофесійності одного експерта $k_1 = 0.8$, тобто $\gamma_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \pm 0.8 \left(\frac{\omega_i}{\omega_j} \right)$, то тільки в випадку, коли у всіх інших експертів $k_1 \leq 0.4$, по всіх реалізаціях об'єднаної матриці отримуємо результат $d(\hat{\omega}, \omega) \in [0, 0.02]$.

Друга модель. Якщо рівень непрофесійності одного експерта $k_2 = 0.9$, то тільки в випадку, коли в інших експертів $k_2 \leq 0.4$, по всіх реалізаціях випадкової об'єднаної матриці виконується $d(\hat{\omega}, \omega) \in [0, 0.02]$. Якщо для інших експертів виконується $k_2 = 0.5$, то для всіх реалізацій випадкової об'єднаної матриці виконується $d(\hat{\omega}, \omega) \in [0, 0.04]$.

Примітка 8. Насправді в силу Наслідку 2 до твердження в експериментах для першої і другої моделі при $k_1 = 0.8$, $k_2 = 0.9$ одного експерта всі інші експерти мали однаковий рівень професійності.

Висновки

Досліджувалась ефективність використання моделей комбінаторної оптимізації [4] для знаходження кількісних характеристик якості конкуруючих альтернатив по емпіричній матриці парних порівнянь одного експерта чи емпіричним матрицям парних порівнянь групи (десяти) незалежних експертів. Були отримані наступні результати.

1. В термінах теорії ймовірностей з використанням найбільш «жорсткого» рівномірного розподілу були сформульовані дві випадкові моделі емпіричної матриці парних порівнянь одного експерта. Професійність (непрофесійність) експерта задавалися параметрами $0.01 \leq k_1 \leq 0.9$ для першої моделі та $0.01 \leq k_2 \leq 0.9$ для другої моделі. Перша модель є найбільш «жорстка», тому статистично обґрунтовані її властивості можна вважати відповідними верхніми границями.

2. Якщо рішення приймаються в результаті обробки реалізації випадкової емпіричної матриці парних порівнянь лише одного експерта, то вимоги до його професійності є надзвичайно жорсткими: $k_1 \leq 0.07$ (перша модель); $k_2 \leq 0.09$ (друга модель).

3. Якщо рішення приймається з використанням реалізацій випадкових матриць парних порівнянь десяти незалежних експертів одного чи різного рівня професійності, то теоретично обґрунтована необхідність використання комбінаторних моделей для реалізацій об'єднаної матриці, в якій кожний елемент є середнім арифметичним відповідних елементів емпіричних матриць парних порівнянь кожного експерта.

4. В результаті статистичних імітаційних експериментів одного рівня професійності виявлено, що для першої моделі максимально допустимий рівень некомпетентності експертів $k_1 = 0.5$, а для другої моделі $k_2 = 0.8$.

5. Для випадку різного рівня непрофесійності незалежних експертів виявлено: Якщо в одного експерта рівень непрофесійності $k_1 = 0.8$, то для отримання достовірного результату всі інші експерти повинні мати рівень компетентності $k_1 \leq 0.4$; для другої моделі, якщо в одного експерта $k_2 = 0.9$, то для отримання достовірного результату в інших експертів рівень компетентності задається умовою $k_2 \leq 0.4$.

6. Головний висновок полягає в тому, що використання одного експерта вимагає практично ідеального рівня професійності. Якщо в цьому є певні сумніви, необхідно використовувати незалежне оцінювання групою експертів, у яких може бути достатньо низький в порівнянні з ідеальним рівень професійності ($k_1 \leq 0.5$ для першої моделі, $k_2 \leq 0.8$ для другої моделі у випадку десяти незалежних експертів).

Список використаних джерел

1. Тоценко В.Г. Методи та системи підтримки прийняття рішень. Алгоритмічний аспект / Наукова думка. 2002.
2. Saaty T.L. The Analytic Hierarchy Process / McGraw-Hill. 1980.
3. Moulin H. Axioms of Cooperative Decision Making / Cambridge University Press. 1991.
4. Згуровский М.З., Павлов А.А. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами / Наукова думка. 2010.
5. Бурков В.Н., Бушуев С.Д., Возный А.М., Гайда А.Ю., Григорян Т.Г., Иванова А.А., Кнырик Н.Р., Колесник М.Э., Кононенко И.В., Кошкин К.В., Павлов А.А., Рыжков С.С., Рыжков А.С., Слободян С.О., Танака Х., Чернов С.К. Управление ресурсами распределенных проектов и программ / Management of the distribute projects and programmes resources // Издательство Торубара В.В. 2015.
6. Павлов О.А., Халус О.А., Мельников О.В., Дрозд В.В., Кобельський В.В., Медведев М.Є. Статичні алгоритми управління паралельними асинхронними обчислювальними процесами / Адаптивні системи автоматичного управління. 2024. Том 1. № 44. С.116–126. DOI: 10.20535/1560-8956.44.2024.302427