

УДК 536.21

О. Стенін, В. Пасько, І. Дроздович, О. Лісовиченко

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ҐРУНТОВІЙ ОСНОВІ ТЕПЛОНАСОСНИХ УСТАНОВОК ОПАЛЕННЯ ТА ОХОЛОДЖЕННЯ БУДІВЕЛЬ

Анотація. У статті вирішується задача визначення значення постійного коефіцієнта двовимірному рівнянні теплопровідності. Для розв'язання задачі пропонується ітераційний наближений підхід, що базується на безперервному операторному методі розв'язання нелінійних рівнянь. Перевагами пропонованого підходу є його простота, а також універсальність, що дозволяє застосовувати його для вирішення широкого класу завдань. Застосування ітераційного наближеного підходу на основі безперервного операторного методу до вирішення задачі визначення коефіцієнта теплопровідності в ґрунтовій основі теплонасосних установок опалення та охолодження будівель, тобто зворотної коефіцієнтної задачі з постійним коефіцієнтом, дозволяє мінімізувати додаткові умови – достатньо інформації про точне рішення в одній точці.

Ключові слова: теплонасосна установка, модель теплообміну в ґрунті, параболічне рівняння, коефіцієнтне зворотне завдання, безперервний метод розв'язання операторних рівнянь

Вступ

Сьогодні, коли людство починає усвідомлювати, що проблема дефіциту невідновлюваних природних енергоресурсів, що наростає, реально існує і впровадження енергозберігаючих технологій генерації теплоти та використання нетрадиційних і відновлюваних енергоджерел замість спалювання вуглеводневого палива стає. Ще однією глобальною проблемою є екологічна проблема підтримки здорового та комфортного середовища існування людини. Прагнення зменшити витрату первинної енергії (споживання палива) без зниження або навіть зі збільшенням віддачі енергії кінцевому споживачеві за рахунок раціональнішого способу її перетворення – головна тенденція розвитку сучасної теплотехніки.

На сьогоднішній день все більшого поширення у світі набувають теплонасосні установки (ТНУ) опалення та охолодження будівель на основі ґрунтових теплообмінників. Причиною їх масового застосування в багатьох розвинених країнах є ефективність та екологічність [1-3]. Це пов'язано насамперед з невисокою вартістю енергоресурсів та екологічною безпекою їх використання. ТНУ дозволяють перетворити низькопотенційну

відновлювану енергію природного джерела теплоти на енергію вищого потенціалу, придатну для практичного використання. Джерелом низькопотенційної теплоти може бути зовнішнє повітря, ґрунт, а також поверхневі та ґрунтові води. Ґрунт зручний тим, що він природним чином акумулює теплоту сонячної радіації та атмосферного повітря і завдяки високим теплоінерційним властивостям зберігає її.

За оцінками експертів Міжнародного енергетичного агентства International Energy Agency (IEA), застосування ТНУ для житла може зберегти до 63% енергії. Впровадження ТНУ стає ключовим завданням у галузі енергозбереження та екології. З погляду стабільності та температурного рівня ґрунт є найбільш прийнятним джерелом низькопотенційної теплоти, яка може забезпечити енергоефективність роботи ТНУ [4].

Незважаючи на те, що в даний час у ряді робіт отримано важливі результати, що полегшують проведення розрахунків та проектування систем теплопостачання на основі ґрунтових ТНУ з урахуванням теплофізичних процесів, що протікають у ґрунті, в той же час існують проблеми, які залишаються невирішеними та вимагають додаткових досліджень

Постановка задачі

Для розрахунку систем ґрунтових теплообмінників важливо знати теплофізичні властивості ґрунтової основи ТНУ, зокрема, теплопровідність ґрунту. Існуючі на сьогоднішній день методики оцінювання теплопровідності є переважно вузькоспеціалізованими і зазвичай намагаються базуються лише на механізмі теплообміну в ґрунтах. Звідси виникає потреба у розробці більш універсального підходу для прогнозування та оцінювання процесів теплообміну нетипової ґрунтової основи ТНУ. Насамперед це стосується використання універсальної математичної моделі процесів теплообміну для відбору низькопотенційного тепла з ґрунту та розробки практичного ефективного підходу до визначення коефіцієнта теплопровідності нетипового ґрунту при використанні ТНУ.

Огляд існуючих рішень

На сьогоднішній день розроблено безліч методів та моделей оцінювання процесів теплообміну в ґрунті. Серед них можна виділити три основні групи: емпіричні, математичні та змішані [5-9]. Найбільш поширеними у практиці є емпіричні методи. Однак вони розроблені та застосовні для вузької групи ґрунтів та для певних діапазонів вологості. Крім того, більшість з них вимагає проведення експериментів, що не дозволяє оцінювати теплопровідність ґрунту на основі його фізичних характеристик [10,11].

Серед змішаних методів оцінювання теплопровідності ґрунту можна виділити методи, описані в [12,13]. Основний підхід при застосуванні цих методів полягає в

тому, що в одиничному об'ємі зразка ґрунту оцінюють концентрацію мінералів, повітря, води і т.д. Проблема в цьому випадку виникає при спробі визначення найбільш придатну геометрії для елементів ґрунту та їхнього взаємного розташування.

Слід зазначити, що універсальних математичних моделей теплообміну для усіх видів ґрунтів, на даний момент не існує. Це пояснюється тим, що ґрунтовий масив системи теплового збору незалежно від того, в якому стані він знаходиться (у мерзломому або талому), є складною трифазною полідисперсною гетерогенною системою, в основі якої величезна кількість твердих частинок різноманітної форми та розмірів, яка може бути як жорсткою, так і рухомою, залежно від того, чи міцно пов'язані між собою частинки, або вони відокремлені один від одного речовиною в рухомій фазі. Проміжки між твердими частинками можуть бути заповнені мінералізованою вологою, газом, паром і льодом або тим і іншим одночасно. Основні механізми теплообміну в ґрунті наведені на рис.1.



Рисунок 1. Основні механізми теплообміну в ґрунті

Моделювання процесів теплообміну, що формують тепловий режим такої багатокомпонентної системи, є надзвичайно складною задачею, оскільки вимагає обліку та математичного опису різноманітних механізмів їх реалізації: теплопровідності в окремій частинці, теплопередачі від однієї частинки до іншої при їх контакті, молекулярної теплопровідності в середовищі, що заповнює проміжки між частинками, а також конвекції пари та води.

Крім того, характерною особливістю режиму систем теплового відбору як об'єкта моделювання є так звана «інформативна невизначеність» математичних

моделей, що описують подібні процеси, або, інакше кажучи, відсутність достовірної інформації про впливи на систему навколишнього середовища (атмосфери і масиву ґрунту, що знаходяться поза зоною теплового впливу ґрунтового). Дійсно, якщо апроксимація впливів зовнішнього клімату на систему, хоча і складна, але все ж таки за певних обчислювальних витрат і використанні існуючих моделей (наприклад, «типового кліматичного року») може бути вирішена, то проблема врахування в моделі теплового відбору підстилаючих і навколишніх шарів ґрунту на сьогоднішній день практично не можна вирішена і є предметом окремих досліджень [14,15].

У зв'язку з інформативною невизначеністю факторів, що впливають на процес теплопровідності в задачі оцінювання коефіцієнта теплопровідності ґрунтової основи ТНУ, побудова математичних моделей таких систем потребує певних припущень. Ця задача належить до класу коефіцієнтних зворотних завдань. Для вирішення коефіцієнтної зворотної задачі теплопровідності застосовується широкий спектр обчислювальних [16-18] та аналітичних методів [19-21].

У статті пропонується ітераційна чисельна процедура визначення значення невідомого коефіцієнта теплопровідності ґрунтової основи ТНУ з використанням неперервного операторного методу [22]. Ключовими перевагами операторного методу є простота побудови та реалізації, а також універсальність (під якою мається на увазі застосування методу без його суттєвої модифікації до широкого класу нелінійних рівнянь у частинних похідних) та стійкість до збурень вихідних даних, доказ якої базується на властивостях логарифмічної норми оператора.

Методи вирішення задачі

Задача оцінювання невідомих параметрів математичних моделей процесу теплообміну в ґрунті належить до класу коефіцієнтних зворотних задач, коли склад ґрунту не відповідає типовим параметрам. У загальному випадку, під рішенням коефіцієнтної зворотної завдання мається на увазі визначення за фіксованих граничних і початкових умов коефіцієнта теплопровідності ґрунту.

Вважаючи ґрунт в процесі відбору низькопотенційної енергії квазіоднорідним тілом з однаковою теплопровідністю λ в різних напрямках, у загальному випадку процес дифузії вологи та теплообміну між частинками в деякій області ґрунтової основи ТНУ згідно роботи [21] можна описати рівнянням:

$$\rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_w(x, y, z, T), \quad (1)$$

де $T(x, y, t)$ – шукана функція температури ґрунту, °C; ρ – об'ємна теплоємність ґрунту, Дж К⁻¹ м⁻³; λ – теплопровідність ґрунту, Вт м⁻¹·К⁻¹; t – час, с; $Q_w(x, y, z, T)$ – питома теплова продуктивність внутрішніх джерел тепла, Вт м⁻³.

Для вибору необхідної глибини розміщення ґрунтового теплообмінника ТНУ достатньо розглядати горизонтальні зрізи на рівнях z_i , внаслідок чого рівняння (1) суттєво спроститься для досліджень та набуде наступного вигляду:

$$\rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$T(x, y, 0) = \varphi_0(x, y) \quad (3)$$

за умови, що $t \geq 0, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$.

Задача оцінювання коефіцієнта теплопровідності нетипового ґрунту в цьому випадку полягає в наступному. Для математичної моделі процесу теплоперенесення в ґрунтовій основі ТНУ, що описується рівняннями (2)-(3), необхідно, на основі апріорної інформації про стан ґрунту, визначити значення коефіцієнта теплопровідності λ ґрунтової основи ТНУ.

Відомо [21], що загальний розв'язок лінійного рівняння параболічного типу з двома просторовими змінними (2) має такий вигляд:

$$T(x, y, t) = 1/4\pi\lambda t \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta) \exp -[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] / 4\lambda t d\xi d\eta, \quad (4)$$

Введемо допоміжну функцію $\lambda^*(\sigma)$, яка зв'язана з шуканим коефіцієнтом λ за допомогою границі $\lambda = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lambda^*(\sigma)$. Будемо вважати, що у певній точці (x^*, y^*, t^*) відомо значення функції $T(x^*, y^*, t^*)$. Тоді, в цій точці маємо вираз (4) у такому вигляді:

$$A(\lambda^*(\sigma)) = 1/4\pi\lambda^*(\sigma)t^* \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta) \exp -\left[\frac{(x^* - \xi)^2 + (y^* - \eta)^2}{4\pi\lambda^*(\sigma)t^*}\right] d\xi d\eta \quad (5)$$

Згідно з неперервним операторним методом [22] функція $\lambda^*(\sigma)$ задовольняє диференціальному рівнянню:

$$d\lambda^*/d\sigma = A(\lambda^*(\sigma)) - f, \quad (6)$$

де $f = T(x^*, y^*, t^*)$.

Задаємо достатньо велике ціле додатне число N – кількість точок дискретизації для ітераційного процесу відновлення значень функції $\lambda^*(\sigma)$ на деякому проміжку $\sigma \in [0, L]$. Маємо $h = L/N$ і введемо позначення $\lambda_j^* = \lambda^*(\sigma_j), j = 0, 1, \dots, N$. Розв'язати диференціальне рівняння (6) можна одним із чисельних методів, зокрема методами Рунге-Кутта[23]. В результаті, задаючи необхідну точність ε , отримаємо наближене значення параметра $\lambda_{\text{набл.}}$.

Звідси для задачі наближеного обчислення коефіцієнта теплопровідності нетипового ґрунту необхідно мати значення температури у заданій точці ґрунту, яке відповідає одному із частинних розв'язків рівняння (2), яке має вигляд [21]:

$$T(x, y, t) = A \cos(k_1 + C_1) \cos(k_2 y + C_2) \exp[-(k_1^2 + k_2^2)at]. \quad (7)$$

Для реалізації чисельної процедури наближеного обчислення коефіцієнта теплопровідності нетипового ґрунту необхідно крім заданої точності ε , задати

початкове наближення коефіцієнта λ_0 , а також число L , що визначає межу інтервалу $[0, L]$, на якому наближено обчислюється розв'язок диференціального рівняння методом Рунге-Кутта, і відповідно задати крок інтегрування h .

Припустимо, що відомо значення температури у заданій точці ґрунту $T(x^*, y^*, t^* = T(0.1, 0.3, 0.5) \approx 0,0767$. Це значення точного розв'язку відповідає значенню частинного розв'язку (7) диференціального рівняння (2) $T(x, y, t) = \cos 2x \cos y \exp(-5t)$ за наступних значень параметрів $A = 1$, $C_1 = C_2 = 0$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $t = 0.5$ та точному значенні $\lambda_{\text{точн.}} = 4$ в задачі Коші для двовимірного рівняння теплопровідності (2). Проведене моделювання з точністю $\varepsilon = 0.03$; $\lambda_0 = 5$, $h = 0.1$ на інтервалі $[0, 5]$ дало близьке до точного наближене значення $\lambda = 4,0247$.

Слід зазначити, що на обсяг обчислень і точність визначення значення коефіцієнта теплопровідності істотно впливає вдалий вибір початкового наближення коефіцієнта λ_0 . Цей вибір багато в чому визначається обсягом та достовірністю інформації від відповідних геолого-розвідувальних служб регіону, для якого визначається коефіцієнт теплопровідності ґрунту.

Висновки

Задача оцінювання невідомих параметрів математичних моделей процесу теплообміну в ґрунті є досить актуальною, що обумовлено необхідністю підвищення якості функціонування ТНУ теплопостачання та охолодження будівель, в умовах, коли склад ґрунту не задовольняє типовим випадкам. В статті вирішується задача визначення значення постійного коефіцієнта двовимірному рівнянню теплопровідності. Для розв'язування задачі запропоновано наближений метод, що базується на неперервному операторному методі розв'язання нелінійних рівнянь. Перевагами пропонованого підходу є його простота і універсальність, що дозволяє застосовувати його для розв'язування широкого класу завдань. Застосування неперервного операторного методу для розв'язування зворотної коефіцієнтної задачі з постійним коефіцієнтом дозволяє мінімізувати необхідність задання додаткових умов, достатньо лише інформації про точне розв'язок тільки в одній точці.

Список використаних джерел

1. Мацевитый Ю.М., Чиркин Н.Б., Клепанда А.С. Об использовании тепловых насосов в мире и что тормозит их широкомасштабное внедрение в Украине. Энергосбережение. Энергетика. Энергоаудит, №2(120), 2014. – С. 2-17.
2. Strielkowski W., Civín L., Tarkhanova E., Tvaronaviciene M., Petrenko Y. Renewable Energy in the Sustainable Development of Electrical Power Sector: A Review. V. 14, 8240. 2021. – P.2-24. <https://doi.org/10.3390/en14248240>

3. Communication from the commission to the European parliament, the council, the European economic and social committee of the regions. EU «Save Energy», Brussels, 18.5.2022, COM (2022) 240. –15p.
4. Sanner B. Earth Heat Pumps and Underground Thermal Energy Storage in Germany. Proc. World Geothermal Congress.1995.– P. 2167-2172.
5. Abu-Hamdeh N., Reeder Randall. Soil thermal conductivity: Effects of density, moisture, salt concentration, and organic matter // Soil Science Society of America Journal. Vol. 64, № 4. 2000. – P. 1285-1290. DOI: 10.2136/sssaj2000.6441285x
6. Campbell G., Jungbauer JrJ., Bidlake W., Hungerford R. Predicting the effect of temperature on soil thermal conductivity / // Soil Science. – 1994. – Vol. 5, no. 158. – P.307-313.
7. Johansen O. Thermal conductivity of soils and rocks // Proceedings of the Sixth International Congress of the Foundation Francaise d'Etudes Nordiques. – 1975. – Vol.2.– P.407–420.
8. Lu N., Dong Y. Closed-form equation for thermal conductivity of unsaturated soils at room temperature //Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2015. – Vol.141, no. 6. DOI: 10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0001295
9. Lu Y., Horton R., Tusheng R. An empirical model for estimating soil thermal conductivity from texture, water content, and bulk density // Soil Science Society of America Journal. – 2014. – Vol. 78, № 6. – P. 1876–1868. DOI: 10.2136/sssaj2014.05.0218
10. Dong Y., McCartney J., Lu N. Critical review of thermal conductivity models for unsaturated soils // Geotechnical and Geological Engineering. – 2015. – Vol.33.–P.207–221.DOI:10.1007/s10706-015-9843-2
11. Balázs N. Comparison of approximate soil thermal conductivity calculations with laboratory measurements and new estimation methods for sandy clayey silt // Advanced Materials Research. – 2014. – Vol. 1041. – P. 281–287. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1041.281
12. Gori F., Corasaniti S. Theoretical prediction of the soil thermal conductivity at moderately high temperatures // J. Heat Transf Trans Asme, 2002, vol.124, no. 6, pp. 1001-1008.
13. McGaw R. Heat conduction in saturated granular materials // Highway Research Board Special Report, vol. 103, 1969. – P.114-131.
14. Stuart H. Thermal conductivity of sands // Géotechnique. – 2012. – Vol. 62. – P. 617–625. DOI: 10.1680/geot.11.P.043
15. Brandl, H. Energy foundations and other thermo-active ground structures. / Geotechnique, vol. 56, No. 2, 2006. - P. 81–122. <http://dx.doi.org/10.1680/geot.2006.56.2.81>.
16. Alifanov O. M., Artyukhin E. A., Rumyantsev S.V. Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems // Publisher: Begell House, inc. New York - Wallingford (U.K.) 2015. – 288p.

17. James V. Beck Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem / International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 13, Issue 4, 1970. – P. 703-716. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(70\)90044-X](https://doi.org/10.1016/0017-9310(70)90044-X)
18. Guang-an Zou, Bo Wang. Numerical Methods for Solving the Direct and Inverse Problems of the Parabolic Equation // Wang Institute of Applied Mathematics. IEEE, 2011. – P.44-47. DOI:10.1109/ITAP.2011.6006239
19. Danilaev G. Coefficient Inverse Problems for Parabolic Type Equations and Their Application // Published by De Gruyter. Volume 25 in the series Inverse and Ill-Posed Problems Series. 2001. – 115p. <https://doi.org/10.1515/9783110940916>
20. Іванчов М.І., Савіцька Т.В. Обернена задача для параболического рівняння в області з вільною межею, яка вироджується в початковий момент часу / Український математичний вісник, Т. 8, № 3, 2011. – С. 381-403.
21. Polyanin D. Handbook of linear equations of mathematical physics for Engineers and Scientists. 1st Edition. – New York: Chapman and Hall/CRC, 2001. – 800p. DOI:10.1201/9781420035322
22. Акимов В.А., Гончарова С.В. Операторный метод решения уравнения теплопроводности / Международный научно-технический сборник: Теоретическая и прикладная механика, Белорусский национальный технический университет, выпуск 31, 2016. – С. 374-376.
23. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. - К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.