

УДК 681.51

О.А.Стенін, В.П.Пасько, М.О.Солдатова, С.О.Стенін

МОДАЛЬНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ СТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЮВАННЯМ В КОНТУРІ УПРАВЛІННЯ

Анотація. У статті розв'язано задачу АСОР для лінійних динамічних систем із запізненням у контурі керування за допомогою модального підходу. Модальний підхід дає змогу забезпечити задані динамічні показники якості перехідних процесів у замкнутій оптимальній системі. Синтез закону оптимального керування здійснено на основі запропонованого в статті методу невизначених коефіцієнтів. Для вибору потрібного спектру коренів оптимальної замкнутої системи запропоновано процедуру вибору та корекції спектру коренів.

Ключові слова: лінійна стаціонарна система, запізнювання в контурі управління модальний синтез, оптимальний закон стабілізації, метод Бесса

Вступ

Проблема системного синтезу є однією з ключових проблем теорії і практики автоматичного керування. Її вирішення призводить до визначення структури та параметрів системи автоматичного управління (САУ) за умови стійкості системи та якості перехідних процесів (досягнення необхідної швидкодії, недопустимості значного перерегулювання та ін.), підвищення точності керування в усталених режимах, тощо. Лінійні регулятори є ефективним засобом забезпечення динамічних характеристик не тільки лінійних об'єктів керування будь-якого високого порядку, але й об'єктів, що містять нелінійні та дискретні зв'язки, що мають істотний, але не вирішальний вплив на динамічні процеси [1]. Існує два основних детермінованих підходи до створення системи управління вектором стану об'єкта: аналітичне конструювання оптимальних регуляторів (АКОР) та модальне управління.

Аналіз літературних джерел

Професор А.М. Лєтов в 1960 році опублікував свої роботи [2], в яких було отримано аналітичний розв'язок задачі оптимальної стабілізації лінійного стаціонарного об'єкта з квадратичним функціоналом якості, який пізніше отримав назву «аналітичне конструювання оптимальних регуляторів» (АКОР). Проблема

оптимізації лінійних нестационарних об'єктів була вирішена в рамках задач лінійно-квадратичної оптимізації в роботі Калмана [3]. Кінцевою метою АКОР є отримання аналітичним шляхом закону керування з урахуванням вимог до якості управління [4,5]. Синтез оптимальної замкнутої системи керування з використанням АКОР залежить від вибору розробником відповідних значень коефіцієнтів матриці штрафів для отримання мінімального критерію якості не зовсім зручно через відсутність очевидного зв'язку між вибраними коефіцієнтами та перехідними процесами в замкнутій системі. Крім того, застосування методу АКОР призводить до необхідності розв'язування нелінійного матричного рівняння Ріккаті, що є нетривіальною задачею та потребує застосування спеціальних чисельних процедур [4,6].

Сутність модального синтезу оптимального управління полягає у визначенні числових значень коефіцієнтів передачі зворотного зв'язку за всіма змінними стану об'єкта з метою забезпечення заданого розподілу коренів характеристичного рівняння (власних значень) у замкнутій системі управління. У статті [7] авторами запропоновано процедуру синтезу оптимального модального закону стабілізації лінійних стаціонарних систем без запізнювання в контурі управління на основі бажаних власних значень коренів замкнутої системи управління.

Проте більшість реальних технологічних об'єктів та процесів мають запізнювання в контурі управління [1,8,9]. Наявність запізнювання зумовлена кінцевою швидкістю поширення інформаційних потоків в технологічних об'єктах. Запізнювання також може виникати через час, витрачений на передачу сигналу, або, що буває частіше, може бути викликана феноменом спрощення припущень, в силу якого вважається, що дія проміжних і підсилювальних ланок в технологічному об'єкті або процесі зводиться до передачі сигналу із запізнюванням. У цих випадках мають на увазі транспортне запізнювання [10]. Слід зазначити також, що, крім затримки передачі сигналу, на якість керування істотно впливає також і інертність пристрою управління. У цій статті запропоновано процедуру синтезу оптимального модального закону стабілізації лінійних стаціонарних систем із запізнюванням в контурі управління на основі методу невизначених коефіцієнтів.

Постановка задачі дослідження

Вважаємо, що математична модель динаміки об'єкта із запізнюванням в контурі управління в режимі стабілізації заданого програмного руху описується як

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + By(t), \quad (1)$$

де $x(t) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – повністю вимірюваний вектор відхилення станів системи від заданої траєкторії; A, B – матриці розмірністю відповідно $(n \times n)$, $(n \times l)$; y – скаляр, що

характеризує відхилення змінних стану системи з урахуванням запізнювання в контурі управління і інерційності пристрою управління, динамічна модель якого має вигляд

$$\dot{y} = \lambda_y y(t) + d_u u(t - \theta), \quad (2)$$

де λ_y, d_u, θ – константи, які залежать від особливостей пристрою управління ($\lambda_y = -\frac{1}{T}$; $d_u = \frac{k}{T}$); $u(t - \theta)$ – скалярне управління з транспортним запізнюванням.

Метою дослідження є визначення закону керування $u(t - \theta)$, який забезпечує задані динамічні характеристики процесу стабілізації та досягнення стійкого програмного руху системи (1,2).

Методи вирішення задачі

Відомо [11], що для повністю вимірюваних систем без запізнювання в контурі управління виду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3)$$

для квадратичного критерію якості виду

$$F(x, u) = \int_0^\infty x^T G x + u^T Q u dt,$$

де G, Q – діагональні матриці постійних коефіцієнтів відповідної розмірності, оптимальне управління є лінійною функцією змінних стану, тобто

$$u = p^T x. \quad (4)$$

Якщо вектор коефіцієнтів зворотного зв'язку p вибрати таким, щоб полюси замкнутої системи (3) розташовувалися в заданих довільних точках, то замкнутої системи будуть забезпечені необхідні динамічні властивості [1,7]. Таким чином, задача зводиться до вибору оптимального розташування полюсів і визначення за ними коефіцієнтів зворотного зв'язку.

Покажемо, що невідомі коефіцієнти $p_i (i = 1, n)$ характеристичного визначника замкнутої оптимальної системи [7]:

$$\det(A + Bp^T - I\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11} + b_1 p_1 - \lambda & \dots & a_{1j} p_j & \dots & a_{1n} + b_1 p_n \\ a_{j1} + b_j p_1 & \dots & a_{jj} + b_j p_j - \lambda & \dots & a_{jn} + b_j p_n \\ a_{n1} + b_n p_1 & \dots & a_{nj} + b_n p_j & \dots & a_{nn} + b_n p_n - \lambda \end{bmatrix}$$

лінійно входять у вираз для коефіцієнтів характеристичного полінома замкнутої системи.

Припустимо, що в (5) $\exists b_k / b_k \neq 0$. Тоді, віднімаючи послідовно k -й ($j \neq k$) рядок, помножений на b_j / b_k , з j -го рядка, отримуємо визначник, що дорівнює вихідному (5), в якому коефіцієнти зворотного зв'язку $p_i (i = 1, n)$ входять тільки у k -й рядок. Розгорнувши його вздовж нього та згрупувавши доданки з відповідними степенями λ , отримаємо наступний вираз для характеристичного полінома замкнутої системи:

$$H(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} (c_j^T + d_j)$$

або

$$H(\lambda) = \lambda^n + (\mathbf{c}_{n-1}^T \mathbf{p} + d_{n-1})\lambda^{n-1} + (\mathbf{c}_0^T \mathbf{p} + d_0). \quad (6)$$

Далі на $(n+1)$ кроці визначаємо невідомі параметри c_{ji} , d_j ($j = 1, n; i = 1, n$), застосовуючи запропонований нижче метод невизначених коефіцієнтів. Для цього в характеристичний визначник (5) на першому кроці методу вносимо $p_i = 0$ ($i = 1, n$) і обчислюємо його одним із відомих чисельних методів [12]. Знайдені на першому кроці коефіцієнти при різних степенях λ визначають невідомі коефіцієнти d_j ($j = 0, n$) характеристичного полінома замкненої системи для відповідних степенів λ . На наступних n кроках, задаючи послідовно один із коефіцієнтів p_i ($i = 1, n$) рівним одиниці, а інші залишаючи нульовими та розкриваючи характеристичний визначник (5), отримуємо вирази для невідомих параметрів c_{ji} для відповідних степенів λ^j ($j = 0, n-1$) характеристичного поліному замкненої системи (6) у вигляді:

$$c_{ji} = f_i - d_i. \quad (7)$$

де f_i – коефіцієнт i -го розкритого визначника (5) у вигляді характеристичного поліному (6).

З іншого боку, характеристичний поліном замкнутої системи з шуканими коренями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ має вигляд [1,12]:

$$F(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda - \lambda_j) = \sum_{j=1}^{n-1} q_j \lambda^j + \lambda^n. \quad (8)$$

У результаті для визначення коефіцієнтів зворотного зв'язку $\mathbf{p}$ у виразі (4) прирівнюємо вирази для коефіцієнтів при однакових степенях у (6) і (8), і отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\text{col}(\mathbf{c}_{n-1}^T \mathbf{p}, \dots, \mathbf{c}_0^T \mathbf{p}) \mathbf{p} = \mathbf{q} - \mathbf{d}. \quad (9)$$

де $\mathbf{q} = (q_{n-1}, q_{n-2}, \dots, q_0)$; $\mathbf{d} = (d_{n-1}, d_{n-2}, \dots, d_0)$.

Розглянемо тепер процедуру модального синтезу на основі методу невизначених коефіцієнтів [13], запропоновану в даній статті для лінійних динамічних систем із транспортним запізнюванням в контурі керування.

Вважаючи, що величина запізнювання θ має достатньо мале значення, запишемо рівняння (2) як:

$$\dot{y} = \lambda_y y(t) + d_u u(t) - d_u \theta u(\dot{t}). \quad (10)$$

У цьому випадку, якщо параметри пристрою управління відомі або можуть бути виміряні, задача розв'язується наступним чином.

Введемо розширений фазовий вектор $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = y)^T$. Тоді замкнуте управління визначається як:

$$u = \tilde{\mathbf{p}}^T \tilde{\mathbf{x}} \quad (11)$$

і характеристичний визначник замкнутої системи має вигляд:

$$\det(A^* - I\lambda) = \left[\begin{array}{cc} (A - I\lambda) & B \\ -\frac{d_u(\mathbf{p}^T - \theta \mathbf{p}^T A)}{1 + d_u \theta p_{n+1}} & \frac{\lambda_y + d_u p_{n+1} - \theta \mathbf{p}^T B}{1 + d_u \theta p_{n+1}} - \lambda \end{array} \right] = 0, \quad (12a)$$

де A^* – матриця розмірності $(n+1) \times (n+1)$; $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$.

Відомо, що множення всіх елементів рядка або стовпця матриці на деякій множник α еквівалентно множенню її визначника на α [14]. Отже, характеристичний визначник (12a) можна записати:

$$\det(A^* - I\lambda) = \frac{d_u}{1 + d_u \theta_{p_{n+1}}} \left[A - I\lambda \cdot Bp^T - \theta p^T A \lambda_y + \right. \\ \left. + d_u p_{n+1} - d_u p^T \theta B - \lambda(1 + d_u \theta p_{n+1}) \right] = 0 \quad (12b)$$

Оскільки в (12b) множник $\frac{d_u}{1 + d_u \theta p_{n+1}} \neq 0$, то можна записати:

$$\det(A^* - I\lambda) = \begin{vmatrix} A - I\lambda & B \\ p^T - \theta p^T A & \lambda_y + d_u p_{n+1} - d_u p^T \theta B - \lambda(1 + d_u \theta p_{n+1}) \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Легко показати, що характеристичний визначник (13) є поліномом степеня λ^{n+1} , а його коефіцієнти лінійно залежать від $p = (p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1})^T$, тобто:

$$\det(A^* - I\lambda) = H(\lambda, p) = \lambda^{n+1} + (d_n^T + d_n^0)\lambda^n + \dots + (d_0^T + d_0^0) = 0. \quad (14)$$

Дійсно, при розкритті характеристичного визначника (13) за останнім рядком, в якому кожен елемент є лінійною комбінацією коефіцієнтів p , отримуємо вираз (14).

Визначення невідомих коефіцієнтів виконується аналогічно процедурі методу невизначених коефіцієнтів, яка наведена у статті вище.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях λ характеристичного полінома (14) $d_i, d_i^0 (i = 0, n)$ та коефіцієнти характеристичного поліному зі спектром $\{\lambda_i\} (i = 0, n + 1)$, який обрано для забезпечення заданих параметрів якості перехідних процесів і має вигляд:

$$F(\lambda) = \prod_{j=1}^{n+1} (\lambda - \lambda_j) = \sum_{j=0}^n q_j \lambda^j + \lambda^{n+1}, \quad (15)$$

де $q_{n+1} = 1$, отримуємо сумісну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$D_{n+1} \tilde{p} = \tilde{q}, \quad (16)$$

де D_{n+1} – матриця з $(n + 1) \times (n + 1)$ коефіцієнтами, а $\tilde{p}$ та $\tilde{q}$ – вектори-стовпці розмірності $(n + 1)$. Розв'язок системи (16) відповідає визначеному спектру $\{\lambda_i\} (i = 1, n + 1)$ замкнутої системи. Якщо в реальних умовах не можна виміряти або оцінити $y(t)$, необхідно підставити $p_n + 1 \equiv 0$ у рівняння (13). В результаті характеристичний визначник замкнутої системи буде мати вигляд:

$$\det(A^* - I\lambda) = \begin{vmatrix} A - I\lambda & B \\ d_u(p^T - \theta p^T A) & \lambda_y - d_u \theta p^T B - \lambda \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Бажаний характеристичний поліном визначається, виразом (15).

Прирівнюючи коефіцієнти поліномів (17) і (15) при однакових степенях λ , на відміну від (16), отримуємо несумісні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$D_n \bar{p} = \bar{q}, \quad (18)$$

де D_n – матриця $(n \times n)$ коефіцієнтів, а $\bar{p}$ – n -вимірний вектор-стовбець. Щоб розв'язати таку систему можна використати метод найменших квадратів [8], згідно з яким вектор невідомих коефіцієнтів $\bar{p}$ наближено визначається як

$$\bar{p} = (D_n^T D_n)^{-1} D_n^T \bar{q}. \quad (19)$$

Забезпечення якості перехідних процесів здійснюється за рахунок наведеного нижче коректного вибору бажаного спектру коренів замкнутої оптимальної системи. Зазвичай в режимі стабілізації якість управління об'єктом визначається часом перехідного процесу t_{tp} і ступенем його затухання ξ :

$$\xi = \frac{x_{j_{п.п.}}}{x_j^0} < 1; j = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

де x_j – змінні стану вектору $\bar{x}$; а $x_{j_{п.п.}} = x_j(t_{п.п.})$; $x_j^0 = x_j(0)$.

Якщо $\lambda_0 = \varepsilon_0 + i\omega_0$ є домінантним коренем, то розв'язок системи (3) можна наближено записати у вигляді:

$$x_j = x_j(t_0)e^{-\varepsilon_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi_j). \quad (21)$$

З рівняння (21) на основі виразу (20) отримуємо:

$$\frac{x_{j_{п.п.}}}{x_j^0} \leq e^{\varepsilon_0 t_{п.п.}} \leq \xi, \quad \varepsilon_0 \leq \frac{\ln(\xi)}{t_{п.п.}} < 0. \quad (22)$$

Виберемо таке значення частоти ω_0 , яке дорівнює $1/t_{tp}$. Змінна $x_j(t)$ в перехідному процесі здійснить одне коливання навколо положення рівноваги і буде прагнути до нього з протилежного боку стосовно початкового збурення, що дуже бажано з фізичних причин.

Щоб уникнути перерегулювання, решту коренів характеристичного полінома слід розміщувати якомога ближче до домінанти, дотримуючись умов:

$$\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots; \quad \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots; \quad (23)$$

$$|\lambda_k| - |\lambda_{k-1}| > 0.1|\lambda_k|, \quad (24)$$

щоб компоненти з великими коливаннями згасалися швидше і щоб корені не об'єднувалися в кратні [15]. Корені на комплексній площині бажано розташувати якомога лівіше, щоб зменшити час перехідного процесу. Однак обмеження на змінні стану також накладають певні умови на модулі коренів.

З урахуванням позначення (21) можна визначити $\dot{x}_j$ як

$$\dot{x}_j = \frac{d}{dt} x_j = (\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}) \cdot x(t_0)e^{-\varepsilon t} \cos(\omega t + \varphi_j). \quad (25)$$

Кожне j -те рівняння системи (3) породжує дві верхні межі модулів коренів характеристичного поліному, що обумовлено однаковим обмеженням на ліву та праву частини j -го рівняння системи (3).

Враховуючи вираз (25), визначимо, що для лівої частини j -го рівняння системи (3)

$$\max_t \max_\lambda x_j = (\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}) x(t_0)e^{-\varepsilon t} \cos(\omega t + \varphi_j) = \max(\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}) x_j(t_0) \quad (26)$$

Звідси можна записати наступні нерівності

$$\max_t \max_\lambda \sum_i^n a_{ji} x_j(t) \leq \sum_i^n a_{ji} x_j(t_0). \quad (27)$$

Порівнюючи вирази (26) і (27), за відсутності явної залежності нерівності (27) від модуля коренів нерівність можна записати у вигляді:

$$\max_\lambda \sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2} \leq \frac{\sum_i^n a_{ji} x_j(t_0)}{x_j(t_0)}. \quad (28)$$

Найжорсткіше обмеження (28) визначає ліву границю розташування коренів бажаного характеристичного полінома. Таким чином, збільшення ε з метою прискорення процесу згасання призводить до мінімізації ω з урахуванням виразів (23) і (24).

Розташування коренів можна уточнити моделюванням перехідних процесів на основі обмежень на змінні стану шляхом зміни коефіцієнтів характеристичного полінома.

Припустимо, що j -та змінна стану обмежена $\max |x_j| \leq x_j^{\text{зад}}$. У цьому випадку гомотетично зсуваємо всі корені відносно початку координат (згідно з теоремою Вієта) з гомотетичним коефіцієнтом $x_j^{\text{зад}}/x_j$ шляхом множення коефіцієнтів характеристичного полінома на значення $\left[\frac{x_j^{\text{зад}}}{x_j}\right]$. Крім того, значення $\max |x_j|$ буде змінюватися відповідно з (21).

Синтезований оптимальний закон стабілізації (11) системи (1),(2) методом невизначених коефіцієнтів, забезпечує задані динамічні властивості процесу стабілізації системи при відхиленнях від заданої (програмної) траєкторії руху. Однак цей закон внаслідок наявності запізнювання не виключає виникнення в контурі управління стійких автоколивань у кінцевій точці процесу стабілізації поблизу заданої траєкторії. Для компенсації затримки запропоновано метод Бесса [16], суть якого полягає в наступному.

Нехай рівняння оптимальної (за довільним критерієм) поверхні перемикавання за відсутності відставання в системі відоме і має вигляд

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; x \in X^n. \quad (29)$$

Припускаючи, що функція Φ розв'язана для одного з n своїх аргументів, наприклад x_1 , можна записати (29) у вигляді

$$x_1 + \varphi(x_2, \dots, x_n) = 0, x \in X^n. \quad (30)$$

Слід зазначити, що умова розв'язності не обов'язкова, вона береться для наочності. Поверхня перемикавання (30) зображена на рис.1, де АВС – деяка оптимальна траєкторія вимушеного руху системи до поверхні перемикавання (30).

Припустимо, що в системі управління є скалярний керуючий вплив із запізнюванням θ . Щоб траєкторія АВС в цьому випадку зберігалася, як і в системі без запізнювання, очевидно, що оптимальною поверхнею буде геометричне місце точок, з яких через деякий час θ під дією вимушеного руху системи точка, що зображує стан, переміщується на поверхню (30).

Рівняння оптимальної поверхні перемикавання компенсованої системи в цьому випадку має вигляд:

$$\Phi^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; x \in X^n \quad \text{або} \quad x_1 + \varphi^*(x_2, \dots, x_n) = 0, x \in X^n. \quad (31)$$

Позначимо відстань між проекціями точок В і С на осі $x_1 \dots x_n$ як $\Delta_{x_1} \dots \Delta_{x_n}$ відповідно. Очевидно, що $\Delta_{x_i} (i = 1, n)$ є функції часу запізнювання θ ,

а значення $x_i = x_i + \Delta x_i (i = 1, n)$ є поточними значеннями координат, які є значеннями координат системи через час запізнювання θ .

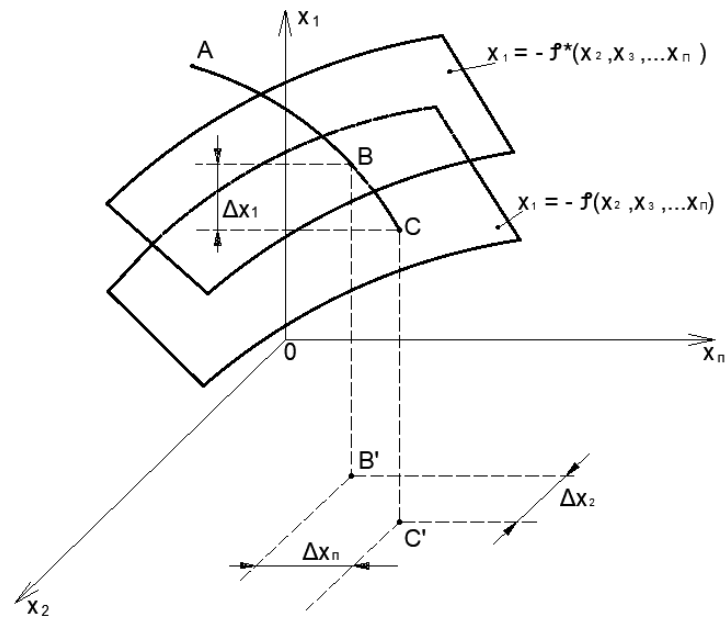


Рисунок 1. Геометрична інтерпретація методу Бесса

З геометричних міркувань маємо

$$x_1 + \varphi^*(x_2, \dots, x_n, \theta) = \Delta x_1 - \varphi(x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n)$$

або

$$\Phi^*(x_1, \dots, x_n) = \Phi(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n). \quad (32)$$

Рівняння (32) є загальним рівнянням для визначення функції Φ^* від Φ . Для цього, згідно з методом Бесса, достатньо визначити значення $\Delta x_i(\theta) (i = 1, n)$, а потім підставити майбутні значення координат системи $(x_i + \Delta x_i)$ в рівняння перемикання системи без запізнювання.

Проте, слід зауважити, що визначення цих величин для класу задач максимальної швидкодії та мінімізації затрат палива суттєво пов'язане з часовим інтервалом між двома послідовними перемиканнями управління, що є специфічним і відсутнім у методі Бесса, який є загальним за своєю природою [10]. Це не стосується задачі, яка розглядається в даній статті.

Визначення компенсованої поверхні відключення управління будемо шукати через загальний розв'язок системи (1),(2) для координат вектору x у «зворотному» часі $z = t_{п.п.} - t$. З урахуванням $dz = -dt$ рівняння (1),(2) виглядатимуть як:

$$\dot{x}(z) = -Ax(z) - By(z); \quad (33)$$

$$\dot{y} = -\lambda_y y(z) + d_u u(z + \theta). \quad (34)$$

де u – управління згідно виразу (11) з визначеними коефіцієнтами зворотного зв'язку.

Вектор початкових значень визначається відповідними змінними $x^0 = x(t_{п.п.})$, що лежать на оптимальній поверхні відключення системи без запізнювання. Зазвичай їх значення $x(t_{п.п.}) = (0,01 - 0,05) x^0$.

У разі тривимірного простору геометричне місце точок, що віддалені на час запізнювання θ від точок $x_{jп.п.} = x_j(t_{п.п.})$, є поверхня трубки, всередині якої знаходиться задана програмна траєкторія. Для підтримки стійкого руху системи(1),(2) при $t \geq t_{п.п.}$ умова рівноваги системи керування буде визначатися як $u(t)=0$ на інтервалі $[t_{п.п.} - \theta, t_{\infty}]$.

Висновки

В даній статті запропоновано модальний синтез лінійних замкнутих систем з оптимальним законом управління у вигляді лінійної комбінації змінних стану, що відповідає вирішенню лінійно-квадратичних задач оптимізації і дозволяє забезпечити задані динамічні властивості перехідних процесів. Процедура модального синтезу оптимального закону керування базується на запропонованому методі невизначених коефіцієнтів. Труднощі вибору необхідних власних значень долаються запропонованою процедурою побудови та корекції спектру коренів замкнутої системи оптимального керування. Запропоновано модальний синтез узагальнений на синтез оптимальних законів стабілізації об'єктів управління з транспортним запізнюванням. Для усунення виникнення внаслідок запізнювання стійких автоколивань в кінцевій точці процесу стабілізації поблизу програмної траєкторії руху пропонується використовувати метод компенсації запізнювання Бесса, згідно з яким необхідно знайти поверхню, розташовану від точки нульової похибки, що лежить на траєкторії, шляхом інтегрування системи (1),(2) у зворотному часі за часом запізнювання при управлінні (11). Фактично для тривимірного випадку ця поверхня являє собою трубку, всередині якої знаходиться задана програмна траєкторія.

Список використаних джерел

1. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник.- 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2007. – 656с.
2. Letov A.M. Analytical Design of Controllers // Automation and telemekhanics. 1960 №4. -P. 436-441, №5. – P.561-568, №6. - P.661-665, 1961. №4. -P.425-435. (in Russian)
3. Kalman R. Contribution to the theory of optimal control / Bullet.Soc.Mech.Matem. – 1960. Vol.12, №2. – P.102-119.
4. Гончаренко Б.М., Лобок О.П., Слезенко А.М. Огляд методів та областей аналітичного конструювання оптимальних регуляторів для стаціонарних і нестаціонарних

багатовимірних об'єктів керування / Харчова промисловість. – К.: НУХТ, № 15. 2014. – С. 149–154.

5. Солдато́ва М.А., Томов П.К., Лисовиченко О.И., Стенин А.А. Идентификация и оптимизация линейных динамических систем-София, Болгария, Изд-во ТУ, 2019. – 170с.

6. Casti, J., The Linear Quadratic Curvature Problem: Remaining Results and Unsolved Problems, SIAM Rev., vol. 22(4), 1980 – P.459–485.

7. .Стенин А.А, Лисовиченко О.И., Ткач М.М., Пасько В.П. Модальный синтез оптимальных законов стабилизации линейных стационарных систем Bulgarian Journal for Engineering Design, issue. Mechanical Engineering Faculty, Technical University-Sofia. № 30, 2016. – P.11-16.

8. Delfour M.C.. Linear-quadratic optimal control problem with delays in state and control variables: a state space approach. SIAM Journal on Control and Optimization, 24(5), 1986. – P.835-883.

9. Boukas E. K., Al-Muthairi N. F., “Delay-dependent stabilization of singular linear systems with delays,” Int J Innovative Comput. Information Control 2, 2006, pp. 283–291. <https://doi.org/10.1360/aas-007-0714>

10. Стенін О. А., Пасько В. П., Дроздович І. Г., Солдато́ва М. О. Оптимальне демпфування відхилень кутових швидкостей осесиметричного космічного літального апарату. Космічна наука і технологія. 2021. 27, № 4 (131). 2021. – С.21-31. <https://doi.org/10.15407/knit2021.04.021>

11. Athans M., Falb P. L. Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications. Courier Corporation, 2006. – 879 p.

12. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. К.: Видавнича група BHV, 2006. - 480 с.

13. Stenin A., Drozdovych I., Soldatova M. Method of uncertain coefficients in problems of optimal stabilization of technological processes/Radio electronics, computer science, management-Zaporizhia, National Technical University, №1(52), 2020. – P.209-217. DOI 10.15588/1607-3274-2020-1-21.

14. Bellman R. Introduction to Matrix Analysis: Second Edition. - SIAM, 1997 - 431s.

15. Korn G. A., Korn T. M., Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. New York/San Francisco/Toronto/London/Sydney 1968. McGraw-Hill Book Company. – 1130p.

16. Bass R.W. Improved on-off Missile Stabilization // Jet Propulsion. – Vol.26. – 1956. – P.415-417.