УДК 621.924.229.86

А.Г. Кику, Е.Ю. Рева

СИНТЕЗ УКОРОЧЕНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В статье рассматриваются вопросы синтеза укороченных моделей динамических объектов для решения различных задач их описания, управления и фильтрации переменны состояния. Как правило, эта зада сводиться к понижению порядка модели.

Понижение порядка моделей отбрасыванием составляющих характеристического уравнения дифференциального уравнения высокого порядка, как правило, приводят к неадекватным моделям.

Более корректным подходом получения укороченных моделей является подход их синтеза с учётом адекватности их поведения в частотном или временном пространствах.

Процедуру синтеза укороченных моделей в статье предлагается выполнить следующим образом:

1. Выбрать структуру укороченной модели;
2. Определить оптимальные оценки параметров последней.

Выбор структуры укороченных моделей

Вопрос выбора структуры разумнее решить в логарифмическом частотном пространстве, так как при этом практически все динамические свойства исходного объекта (полоса пропускания, устойчивость и др.) проще учитывать в укороченной модели [2]. Согласно этому подходу, частотные характеристики исходной и укороченной моделей должны быть "оптимально близкими" с точки зрения обработки интересующих частей спектров входных величин объектов моделирования. Отсюда вытекает, что структура укороченных моделей может быть получена путём "отбрасывания" из характеристического уравнения $D(s) = \prod\limits_{i=1}^{n} (s - \lambda_i)$ дифференциального уравнения объекта тех составляющих $(s - \lambda_i)$, которые "не отвечают" за указанные свойства объекта в интересующей спектральной полосе входных воздействий. При этом указанные мероприятия должны быть выполнены с учётом обеспечения основных динамических свойств объекта, как устойчивость, колебательность и др.

Ниже приводим процедуру выбора структуры укороченной модели указанным подходом на основе сведения модели третьего порядка к модели второго порядка. Пусть логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) объекта третьего порядка, имеет вид указанный на рис. 1. Тогда из асимптотической ЛАЧХ исходного объекта следует, что без нарушения таких свойств, как устойчивость и колебательность, она может быть заменена на ЛАЧХ укороченной модели второго порядка (рис.

1). Таким образом, из характеристического уравнения диф. уравнения исходной модели $D(s) = \prod_{i=1}^{3}(s-\lambda_i)$ может быть отброшен сомножитель $(s-\lambda_3)$.

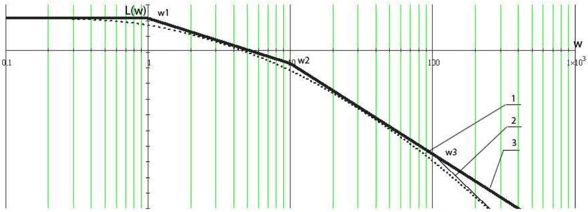

Рис. 1 – Логарифмические амплитудно-частотные характеристики исходной и укороченной моделей объекта (1 – ЛАЧХ исходной модели, 2 – асимптотическая ЛАЧХ исходной модели, 3 – асимптотическая ЛАЧХ укороченной модели)

Определение оценок параметров укороченной модели

Задача определения оптимальных оценок параметров укороченных моделей после выбора их структуры может быть сформулирована в различных пространствах. В данной статье эта задача поставлена и решена во временной и частотной областях.

В качестве критериев $I(a_{n-1},\ldots,a_0,b_m,\ldots,b_0)$ близости исходной и укороченной моделей могут быть использованы различные меры. Так, например во временном и в частном пространствах могут быть использованы следующие меры:

$$I_t(a_{n-1},\ldots,a_0,b_m,\ldots,b_0) = \int_{t1}^{t2}[K(t) - K_y(t,a_{n-1},\ldots,a_0,b_m,\ldots,b_0)])^2 \cdot dt, \tag{1}$$

$$I_\omega(a_{n-1},\ldots,a_0,b_m,\ldots,b_0) = \int_{\omega 1}^{\omega 2}[W(\omega) - W_y(\omega,a_{n-1},\ldots,a_0,b_m,\ldots,b_0)]^2 \cdot d\omega, \tag{2}$$

где $K(t)$ и $W(\omega)$ – соответственно весовая и передаточная функции исходного объекта, $K_y(t)$, $W_y(\omega)$ – весовая и передаточная функции укороченного объекта, $a_{n-1},\ldots,a_0,b_m,\ldots,b_0$ – параметры укороченной модели.

Оптимальные оценки параметров укороченной модели при этом имеют вид

$$\{\hat{a}^*,\hat{b}^*\} = \arg\{\min/a,b\ ,I\}, \tag{3}$$

где $a = [a_0\ldots a_{n-1}]^T$, $b = [b_0,\ldots,b_m]^T$ – вектора её параметров.

 ISSN 1562-9945

Экспериментальные исследования методов понижения порядка модели объекта

Предложенный подход синтеза укороченных моделей был исследованы на базе компьютерного моделирования. Ниже приведены результаты исследований, выполненных при следующих условиях.

В качестве объекта выбран объект 3-го порядка, векторно-матричная модель которого имеет вид

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.75 & -2.75 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{array} \tag{4}$$

В результате укороченная модель объекта (4) на основе критерия (1) имеет вид (5) на основе критерия (2) – вид (6)

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.238 & -0.746 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.612 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{array}, \tag{5}$$

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.186 & -0.645 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.494 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{array} \tag{6}$$

Для оценки качества моделей применительно к переменным состояния использована следующая интегральная мера

$$I = \int_0^{t_1} (x_1 - x_{y1})^2 \cdot +(x_2 - x_{y2})^2 dt, \tag{7}$$

где x_1, x_2 – переменные состояния исходной модели (4), x_{y1}, x_{y2} – первая и вторая переменные состояния укороченных моделей.

Естественным образом степень адекватности укороченных моделей зависит от характеристик входных воздействий.

На рисунке 2 и рисунке 3 приведены графики первой и второй переменных состояния исходной модели, а также укороченных моделей при отсутствии входных воздействий и наличии следующих начальных условий:

$$\begin{array}{l} x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x_y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}, \tag{8}$$

При этом критерии (7) для различных подходов синтеза укороченных моделей принимает следующие значения: при синтезе укороченной модели на основе критерия (1) $I = 0.023$, при синтезе укороченной модели на

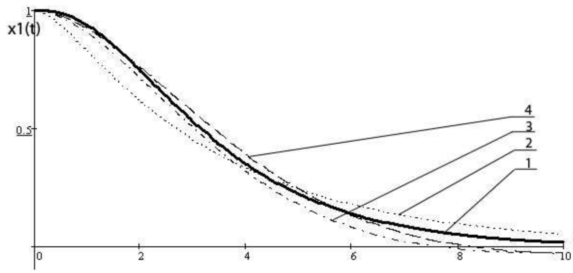

Рис. 2 – График переменных состояния исходной и укороченных моделей (1 – исходной модели; 2 – укороченной модели, полученной отбрасыванием s^3 из характеристического уравнения; 3 – укороченной модели, определённой во временной области; 4 – укороченной модели, определенной частотной области)

основе критерия (2) $I = 0.015$, при синтезе укороченной модели простым отбрасыванием составляющих высокого порядка в характеристическом уравнении дифференциального уравнения векторно-матричной модели (4) $I = 0.067$.

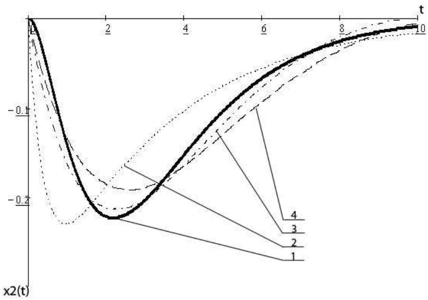

Рис. 3 – График переменных состояния x_2 исходной и укороченных моделей (1 – исходной модели; 2 – укороченной модели, полученной отбрасыванием s^3 из характеристического уравнения; 3 – укороченной модели, определённой во временной области; 4 – укороченной модели, определенной частотной области)

На рис. 4 и рис. 5 приведены графики первой и второй переменных состояния исходной модели, а также укороченных моделей, при наличии на входе сигнала типа “белый шум” и наличии начальных условий (8):

При этом критерии (7) принимают значения: при синтезе укороченной модели на основе критерия (1) $I = 0.032$, при синтезе укороченной модели на основе критерия (2) $I = 0.019$, при синтезе укороченной модели простым отбрасыванием составляющего третьего порядка в характе-

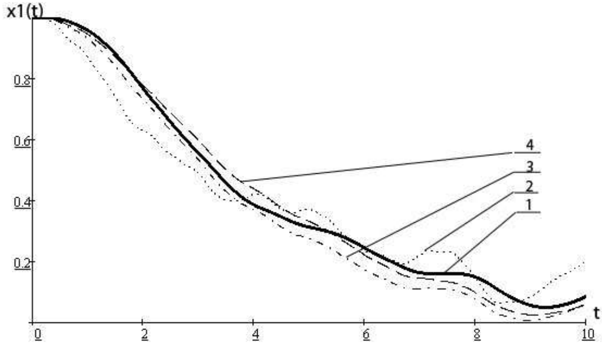

Рис. 4 – График переменных состояния x_1 исходной и укороченных моделей (1 – исходной модели; 2 – укороченной модели, полученной отбрасыванием s^3 из характеристического уравнения; 3 – укороченной модели, определённой во временной области; 4 – укороченной модели, определенной частотной области)

ристическом уравнении диф. уравнения векторно-матричной модели (4) $I = 0.164$.

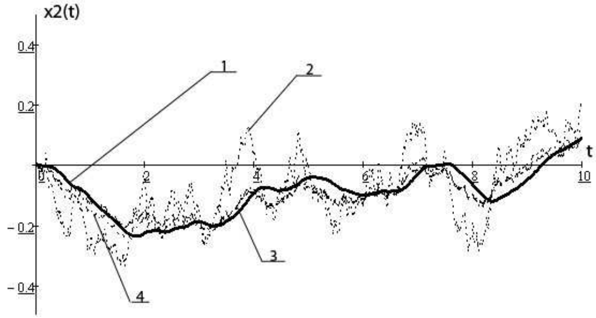

Рис. 5 – График переменных состояния x_2 исходной и укороченных моделей (1 – исходной модели; 2 – укороченной модели, полученной отбрасыванием s^3 из характеристического уравнения; 3 – укороченной модели, определённой во временной области; 4 – укороченной модели, определенной частотной области)

Выводы

На основе полученных результатов сделаны следующие выводы:

1. Логарифмический частотный аппарат позволяет наиболее корректно выбрать структуру укороченных моделей.

2. Использование различных пространств определение оценок параметров укороченных моделей приводит в общем случае к различным результатам.
3. Степень адекватности укороченных моделей зависит от характеристик входных воздействий.
4. Вид пространства определения оценок параметров укороченных моделей должен быть осуществлён с учётом характеристик конкретных входных воздействий объекта.

Литература

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования // издательство “Наука”, М., 1978. - 768 стр.
2. Зайцев Е.П. Теория автоматического управления и регулирования // К-: Выща шк. Головное изд-во, 1989.— 431 с.
3. Пупков К.А., Егупов Н.Д., Воронов Е.М. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т.1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления.// М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 656 с.

Получено 08.11.2008

 ISSN 1562-9945