

СИНТЕЗ УЛУЧШЕННЫХ ФИЛЬТРОВ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ

Статья посвящена синтезу улучшенных фильтров переменных состояния дискретных объектов на основе разработанной постановки задачи фильтрации, которая учитывает влияние рассогласования начальных условий объекта и фильтра на качество оценок. Разработан общий подход повышения качества фильтрации, на базе которого разработаны и исследованы два самостоятельных и один комбинированный методы синтеза улучшенных фильтров. Приведены результаты компьютерного моделирования разработанных фильтров, демонстрирующие значительное преимущество предложенных разработанных фильтров над стандартными фильтрами Калмана.

Анализ калмановского подхода фильтрации переменных состояния

Как известно, в калмановской постановке задач фильтрации переменных состояния к оценкам $\hat{x}[k]$ переменных $x[k]$ выдвигаются требования их несмещенности и эффективности, а к процедуре фильтрации – ее линейность. На основе этих требований калмановская стандартная постановка задачи фильтрации имеет следующий вид:

$$\hat{x}[k] = \arg \left\{ \min tr P[k] \left\{ \begin{array}{l} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + Gw[k], \\ y[k] = Cx[k] + v[k]; \\ M\hat{x}[k] = Mx[k], \\ Mw[k] = 0, Mv[k] = 0; \\ Cov[w[i], w[j]] = R_w \delta_{ij}, Cov[v[i], v[j]] = R_v \delta_{ij}; \\ Cov[w[i], v[j]] = 0, Cov[\hat{x}[0], \hat{x}[0]] = P[0] \end{array} \right. \right\}. \quad (1)$$

где $x = [x_1, \dots, x_n]^T$, $\hat{x} = [\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n]^T$, $u = [u_1, \dots, u_m]^T$, $y = [y_1, \dots, y_l]^T$ – векторы переменных состояния, их оценок, входа объекта и выхода измерителя его выходной величины соответственно, w, v – белые помехи на входе объекта и выходе измерителя, M, Cov – операторы математического ожидания и ковариации соответственно, R_w, R_v – интенсивности помех w, v , δ_{ij} – символ Кронекера, $tr P[k]$ – суммарная дисперсия оценок переменных состояния, зависящая от помех w, v соответственно.

Однако так как фильтр Калмана является динамическим оператором, то качество оценок переменных состояния в существенной мере зависят от их начальных условий $\hat{x}[0]$. Если эти условия не совпадают с начальными условиями $x[0]$ переменных состояния объекта, то ошибки

фильтрации $\varepsilon[k] = x[k] - \hat{x}[k]$ будут содержать свободные составляющие равные:

$$\hat{\varepsilon}_{св} = L[k]\varepsilon[0], \tag{2}$$

где $L[k]$ – переходная матрица состояния фильтра.

Таким образом, в составе оценок будет присутствовать регулярные по структуре и случайные по амплитуде ошибки фильтрации. В стандартной калмановской постановке задачи фильтрации не предусмотрено эффективное подавление этой ошибки. Отсюда вытекает, что фильтр, синтезируемой на основе калмановской постановки задачи фильтрации (1), в общем случае статистически не является оптимальным.

Фильтр Калмана оптимален или в случае отсутствия рассогласования начальных условий объекта и фильтра или после выхода последнего на стационарный режим. Однако после выхода фильтра Калмана на стационарный режим он по существу превращается в фильтр Винера. Отсюда вытекает, что фильтр Калмана, как динамическое преобразование, должен по идее эффективно подавлять влияние рассогласования начальных условий в интервале его выхода на стационарный режим. Но он, согласно калмановской постановки задачи фильтрации, эту задачу не решает.

Из вышеуказанных замечаний следует, что для оптимального решения задачи фильтрации переменных состояния необходима в первую очередь ее оптимальная постановка, которая учитывала бы как влияние помех, так и влияние рассогласований начальных условий переменных состояния в объекте и фильтре на качество фильтрации.

Улучшенная постановка задачи фильтрации переменных состояния

Согласно выполненному анализу корректная постановка задачи фильтрации переменных состояния дискретных объектов может быть получена доукомплектацией стандартной калмановской постановки элементом учета влияния рассогласования начальных условий объекта и фильтра на эффективность оценок переменных состояния. Такая постановка задачи может быть представлена следующим образом:

$$\hat{x}[k] = \arg \left\{ \frac{\min}{A_\phi, K_\phi, B_\phi} [\sigma_{\varepsilon[0]}^2 + \sigma_{w,v}^2] \left. \begin{array}{l} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + Gw[k], \\ y[k] = Cx[k] + v[k]; \\ M\hat{x}[k] = Mx[k], \\ Mw[k] = 0, Mv[k] = 0; \\ Cov[w[i], w[j]] = R_w \delta_{ij}, \\ Cov[v[i], v[j]] = R_v \delta_{ij}; \\ Cov[w[i], v[j]] = 0, \\ Cov[\hat{x}[0], \hat{x}[0]] = P_0. \end{array} \right\}, \tag{3}$$

где $\sigma_x^2[k] = \sigma_{\varepsilon[0]}^2[k] + \sigma_{w,v}^2[k]$, а $\sigma_{\varepsilon[0]}^2, \sigma_{w,v}^2$ – суммарные дисперсии оценок переменных состояния, зависящие от помех рассогласования начальных

условий переменных состояния объекта и фильтра и от помех $w, v, A_\phi, K_\phi, B_\phi$ – матрицы состояния, входа по $y[k]$, и по $u[k]$ соответственно.

Метод синтеза улучшенных фильтров переменных состояния

Согласно выражению (2) для уменьшения влияния рассогласований начальных условий на качество оценок переменных состояния существуют следующие возможности:

1. изменение структуры процесса фильтрации за счет изменения матрицы $L[k]$;
2. уменьшение рассогласования $\varepsilon[0]$ начальных условий переменных состояния объекта и фильтра за счет некоторой оценки $\hat{x}_o[0]$;
3. комбинацией первых двух указанных подходов.

В статье приведен синтез улучшенных фильтров на основе реализации первой из указанных возможностей улучшения качества фильтрации.

Реализация этой возможности может быть осуществлена путем внедрения в контур стандартного фильтра Калмана дополнительной матрицы усиления $K_D[k]$, структура и параметры которой должны быть определены с учетом эффективного подавления влияния рассогласования начальных условий переменных состояния. Аналитическое определение структуры и параметров этой матрицы в общем случае не возможно.

Для приближенного конструирования упомянутой матрицы может быть использован параметрический подход, который предполагает выбор ее структуры и оптимальное определение ее параметров.

Выбор структуры дополнительной матрицы усиления $K_D[k]$ может быть, например, осуществлен на основе следующих “здоровых” эвристических соображений:

- матрица $K_D[k]$ должна обеспечить “достаточное” усиление в контуре фильтра на начальном интервале процесса фильтрации;
- матрица $K_D[k]$ должна обеспечить “достаточное” затухание в контуре фильтра, чтобы не допустить нежелательные, например, неустойчивые, неколебательные и др., процессы фильтрации;
- матрица $K_D[k]$ должна компенсировать влияние колебательности объекта;
- матрица $K_D[k]$ не должна влиять на матрицу усиления фильтра после его выхода на стационарный режим.

Матрица $K_D[k]$, удовлетворяющая указанным требованиям, может в частности быть выбрана следующим:

- при ее последовательном соединении с матрицей усиления $K[k]$ стандартного фильтра Калмана:

$$K_D[k] = K_0 e^{-\beta k} \cdot \text{Cos}(\omega k + \varphi) + E, \quad (4)$$

- при ее параллельном соединении с матрицей усиления $K[k]$

$$K_D[k] = K_0 e^{-\beta k} \cdot \text{Cos}(\omega k + \varphi). \quad (5)$$

Действительно, при соответствующем подборе параметров $K_0, \beta, \omega, \varphi$:

- матрица K_0 может обеспечить требуемую скорость уменьшения влияния рассогласований начальных условий;
- матрица β может обеспечить требуемое затухание процесса уменьшения влияния рассогласований начальных условий;
- матрицы ω, φ могут компенсировать “вредное” влияние колебательности объекта на качество фильтрации.

Структурная схема предложенного фильтра для случая последовательного соединения матриц усиления приведена на следующем рисунке 1.

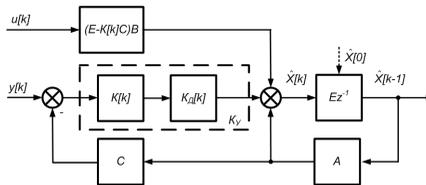


Рис. 1 – Структурная схема фильтра для случая последовательного соединения матриц усиления

Матрица усиления фильтра Калмана определяется обычным образом на основе стандартной калмановской постановки задачи фильтрации.

Параметры фильтра $K_0, \beta, \omega, \varphi$ должны быть найдены из условия минимума суммарного критерия σ_x^2 качества фильтрации.

Результаты экспериментальных исследований предложенного метода синтеза улучшенных фильтров доказывают, что он позволяет синтезировать фильтры переменных состояния, эффективность которых значительно превышает эффективность стандартных фильтров Калмана.

В статье приведены результаты экспериментальных исследований фильтра переменных состояния дискретного объекта третьего порядка.

$$Y[k + 3] - \frac{3}{125}Y[k + 2] - \frac{1}{50}Y[k + 1] + \frac{1}{2}Y[k] = u[k] + w[k], \quad (6)$$

$$y[k] = Y[k] + v[k]. \quad (7)$$

Векторно-матричная модель объекта построена на базе метода нормальных переменных. В качестве помех были использованы последовательности белых шумов с интенсивностями помех $Q_w = 0.25, Q_v = 0.25$.

Рассогласование начальных условий выбрано из нормального распределения с дисперсией. При исследовании были использованы выборки из 100 элементов. Для оценки эффективности фильтрации использованы меры:

$$Q_i(\varepsilon_{ij}[0]) = \frac{1}{N_j} \sum_{l=1}^{N_j} \sum_{k=0}^{k_c} (x_{ilj}[k] - \hat{x}_{ilj}[k])^2, Q_i = \sum_{j=1}^P Q_i(\varepsilon_{ij}[0]), \gamma_i = \frac{Q_i^K}{Q_i^Y}, \quad (8)$$

где $k_c = 10$ – момент выхода процессов фильтрации на стационарный режим, i – номер переменной состояния, j – номер интервала эксперимента, p_j – вероятность попадания рассогласования $\varepsilon_{ij}[0]$ в j -й интервал, $N_j = 100p_j$ – количество экспериментов в j -м интервале, число интервалов $P = 21$, индекс K относится к фильтру Калмана, индекс Y – к улучшенному фильтру.

Результаты экспериментальных исследований приведены на ниже следующих рисунках:

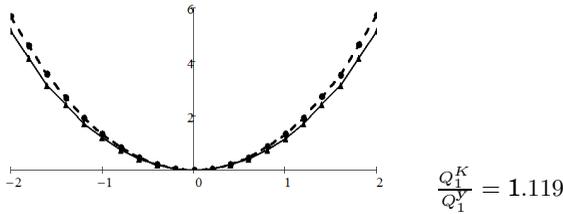


Рис. 2 – Графики зависимости эффективности \hat{x}_1 от $\varepsilon[0]$: непрерывная линия – для улучшенного фильтра, штриховая – для стандартного фильтра Калмана.

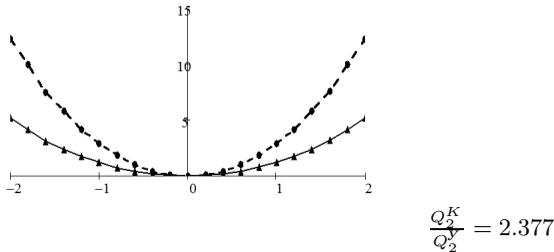
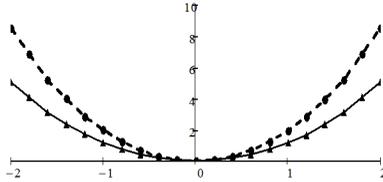
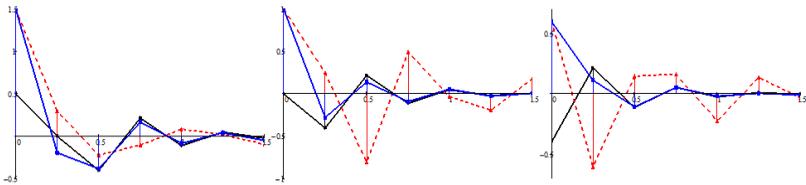


Рис. 3 – Графики зависимости эффективности \hat{x}_2 от $\varepsilon[0]$: непрерывная линия – для улучшенного фильтра, штриховая - для стандартного фильтра Калмана.



$$\frac{Q_3^K}{Q_3^Y} = 1.671$$

Рис. 4 – Графики зависимости эффективности \hat{x}_3 от $\varepsilon[0]$: непрерывная линия – для улучшенного фильтра, штриховая – для стандартного фильтра Калмана.



для переменной x_1

для переменной x_2

для переменной x_3

Рис. 5 – Графики переменных состояния (сплошные жирные линии), их калмановских (непрерывные линии) и улучшенных (пунктирные линии) оценок.

Анализ результатов экспериментальных исследований убедительно доказывает, что эффективность разработанного фильтра существенно выше эффективности стандартного фильтра Калмана.

Литература

1. Kalman R.E. The theory of Optimal Control and the Calculus of Variations. Mathematical Optimization Techniques // University of California Press , Berkeley – 1963.
2. Кикю А.Г. Улучшение калмановской фильтрации переменных состояния // Адаптивные системы автоматического управления.-2003.- 6 (26).
3. Кикю А.Г., Рева Е.Ю. Компенсация влияния рассогласования начальных условий фильтров переменных состояния // Адаптивные системы автоматического управления.-2006.- 9 (29).

Получено 12.04.2008