УДК 519.85

Ю.М. Кеменяш

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДЕМПФУВАННЯ РІДИНИ У РУХОМИХ РЕЗЕРВУАРАХ

Розглянемо ємкість циліндричної форми із твердою стінкою S, яка частково заповнена рідиною із вільною поверхнею Σ. Початок системи координат $Oxyz$ зв'яжемо з центром незбуреної вільної поверхні Σ_0, вісь Ox спрямуємо у бік, протилежний напрямку вектора прискорення сил тяжіння **g**.

Подамо рівняння збуреної вільної поверхні Σ у вигляді:

$$x = f(y, z, t). \tag{1}$$

Відповідна нелінійна крайова задача про коливання обмеженого об'єму рідини формулюється так [1]:

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z, t) = 0, \quad \mathbf{r} \in Q; \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma; \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\nabla\varphi\right)^2 + gx = 0, \ \mathbf{r} \in \Sigma; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma, \tag{5}$$

де $\varphi(x, y, z, t)$ — потенціал швидкостей рідини; $\mathbf{n}$ — орт зовнішньої нормалі до поверхні Σ. Тиск в ідеальній рідині у разі потенційних течій визначається, як відомо, [2], з інтеграла Лагранжа

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\nabla\varphi\right)^2 + gx + \frac{p}{\rho} = 0, \tag{6}$$

де ρ — щільність рідини.

Якщо запровадити функцію Гамільтона

$$L = -\rho \int\limits_Q \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\nabla\varphi\right)^2 + gx\right] dQ, \tag{7}$$

крайова задача (2)—(5) є необхідна умова існування стаціонарного значення функціонала

$$W = \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt. \tag{8}$$

 ISSN 1562-9945

Враховуючи, що рівняння (2) і межова умова (5) лінійні, потенціал $\varphi(x, y, z, t)$ задамо у вигляді

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(t)\varphi_n(x, y, z), \tag{9}$$

де $R_n(t)$ — параметри, що характеризують змінювання потенціалу швидкостей у часі; $\varphi_n(x, y, z)$— система гармонічних в області Q функцій, що задовольняють межову умову на поверхні S ємкості.

Необхідність у вирішенні такої задачі пов'язана із розв'язанням задач демпфування коливань рідини у рухомому сосуді. Подамо крайову задачу для функції $\Omega_1(x, \xi, \eta, t)$ у циліндричній системі координат (x, ξ, η) :

$$\nabla^2\Omega_1 = 0, \quad \mathbf{r} \in Q; \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial\Omega_1}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\Sigma} = -\frac{f_\eta}{N}; \quad \left.\frac{\partial\Omega_1}{\partial\mathbf{n}}\right|_{S} = 0, \tag{11}$$

де $f(\xi, \eta, t)$ визначається виразом [3].

$$x = f(\xi, \eta, t) = \sum_{m,n} [r_{mn}(t)\sin m\eta + p_{mn}(t)\cos m\eta]\kappa_{mn}\psi(0, \xi). \tag{12}$$

$$\mathbf{n} = \left\{\frac{1}{N}, -\frac{f_y}{N}, \frac{f_z}{N}\right\}.$$

За координатні функції слушно обрати систему гармонічних функцій

$$\begin{gathered}\varphi(x, \xi, \eta, t) = P_0(t)\psi_0(x, \xi) + [R_1(t)\sin\eta + P_1(t)\cos\eta]\psi_1(x, \xi)+ \\ +[R_2(t)\sin 2\eta + P_2(t)\cos 2\eta]\psi_2(x, \xi)\end{gathered} \tag{13}$$

як частинний випадок загального подання потенціалу швидкостей

$$\varphi(x, \xi, \eta, t) = \sum_{m,n} [R_{mn}(t)\sin\, m\eta + P_{mn}(t)\cos\, m\eta]\psi_{mn}(x, \xi).$$

Отже, Ω_1 шукатимемо у вигляді

$$\Omega_1(x, \xi, \eta, t) = \sum_{m,n} [R^{(1)}_{mn}(t)\sin\, m\eta + P^{(1)}_{mn}(t)\cos\, m\eta]\psi_{mn}(x, \xi); \tag{14}$$

$$\psi_{mn}(x, \xi) = \frac{ch[\kappa_{mn}(x - x_0)]}{ch\kappa_{mn}h} Y_m(\kappa_{mn}\xi).$$

При побудові наближеного розв'язання (14) обмежимося членами третього порядку малості відносно параметрів у (12) і, відповідно, у (14).

Будемо вирішувати поставлену задачу варіаційним методом, мінімізуючи гамільтоніан (7) із обмеженнями у вигляді крайової задачі (2)—(5).

Циліндричну систему координат $Ox\xi\eta$ зв'яжемо із незбуреною поверхнею рідини Σ_0, спрямовуючи вісь Ox у бік, протилежний вектору g.

Глибина рідини позначена через h, радіуси внутрішнього і зовнішнього циліндрів – через R_0 і R_1. Відповідно до розкладання у ряди функцій $x = f(y, z, t)$ і $\varphi(x, y, z, t)$ вирази для форми вільної поверхні і потенціалу швидкостей мають вигляд:

$$x = f(\xi, \eta, t) = \sum_{m,n} [r_{mn}(t) \sin m\eta + p_{mn}(t) \cos m\eta] f_{mn}(\xi), \tag{15}$$

$$f_{mn}(\xi) = Y_m(\kappa_{mn}\xi), \tag{16}$$

$$Y_m(\kappa_{mn}\xi) = \frac{J_m(\kappa_{mn}\xi)N_m^{'}(\varsigma_{mn}) - N_m(\kappa_{mn}\xi)J_m^{'}(\varsigma_{mn})}{J_m(\varsigma_{mn})N_m^{'}(\varsigma_{mn}) - N_m(\varsigma_{mn})J_m^{'}(\varsigma_{mn})}, \tag{17}$$

$$\psi_{mn}(x, \xi) = \frac{ch[\kappa_{mn}(x + h)]}{ch(\kappa_{mn}h)} Y_m(\kappa_{mn}\xi); \tag{18}$$

$J_m(\kappa_{mn}\xi)$ і $N_m(\kappa_{mn}\xi)$ – функції Бесселя і Неймана m-го порядку; $\varsigma_{mn} = \kappa_{mn}R_1$ – корені рівняння

$$J_m^{'}(\delta\varsigma)N_m^{'}(\varsigma) - N_m^{'}(\delta\varsigma)J_m^{'}(\varsigma) = 0, \ \delta = R_0/R_1.$$

Утримаємо у цих виразах основні гармоніки для значень $m = 0, 1, 2$.

Сформульована задача – варіаційна задача пошуку мінімуму функціонала (8) за наявності обмежень у вигляді крайової задачі (2)—(5). Її розв’язання дається виразами (15)—(18). Вирази для параметрів функції (13) отримані у вигляді [3]:

$$P_0(t) = C_0[r_1(t)\dot{r}_1(t) + p_1(t)\dot{p}_1(t)] + D_0\dot{p}_0(t), \tag{19}$$

$$\begin{aligned} R_1(t) = {} & \tfrac{1}{\kappa_{11}} r_1(t) + C_2 r_1^2(t)\dot{r}_1(t) + D_3 p_1^2(t)\dot{r}_1(t) + C_1 r_1(t)p_1(t)\dot{p}_1(t) + \\ & D_2[r_2(t)\dot{p}_1(t) - p_2(t)\dot{r}_1(t)] + \\ & C_3[p_1(t)\dot{r}_2(t) - r_1(t)\dot{p}_2(t)] + B_0 p_0(t)\dot{r}_1(t) + B_3 r_1(t)\dot{p}_0(t). \end{aligned} \tag{20}$$

Аналогічний вигляд мають вирази для $P_1(t), R_2(t), P_2(t)$. Коефіцієнти $C_0, C_1, C_2, C_3, \ B_0, B_1, B_2, B_3, \ D_0, D_1, D_2, D_3$ обчислюються через обчислення інтегралів від функцій Бесселя вигляду

$$i_{ij} = \int_{R_0}^{R_1} \xi Y_i Y_j Y_i^{'} Y_j^{'} d\xi.$$

Чисельне обчислення інтегралів такого вигляду пов’язане із проблемами точності інтегрування. У зв’язку з цією обставиною запропоновано алгоритм [3], який ґрунтується на апроксимації функцій Бесселя дробово-раціональними виразами, що дозволяє запобігти необхідності у чисельному інтегруванні й отримати значення таких інтегралів в аналітичному вигляді.

Диференціальні рівняння для визначення узагальнених координат $p_0(t), r_1(t), p_1(t), r_2(t), p_2(t)$, які входять у вирази вигляду (19),(20), отримані в [1]. Зокрема, рівняння відносно $r_1(t)$ має вигляд:

$$\begin{gathered}\mu_1\left(\frac{d^2r_1}{dt^2}+\sigma_1^2r_1\right)+d_1r_1\left[r_1\frac{d^2r_1}{dt^2}+\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2+p_1\frac{d^2p_1}{dt^2}+\left(\frac{dp_1}{dt}\right)^2\right]+\\+d_2\left[p_1^2\frac{d^2r_1}{dt^2}+2p_1\frac{dr_1}{dt}\frac{dp_1}{dt}-r_1p_1\frac{d^2p_1}{dt^2}-2r_1\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right]-\\-d_3\left(p_2\frac{d^2r_1}{dt^2}-r_2\frac{d^2p_1}{dt^2}+\frac{dr_1}{dt}\frac{dp_2}{dt}-\frac{dr_2}{dt}\frac{dp_1}{dt}\right)+d_4\left(r_1\frac{d^2p_2}{dt^2}-p_1\frac{d^2r_2}{dt^2}\right)+\\+d_5\left(p_0\frac{d^2r_1}{dt^2}-\frac{dr_1}{dt}\frac{dp_0}{dt}\right)+d_6r_1\frac{d^2p_0}{dt^2}=0.\end{gathered} \tag{21}$$

Аналогічний вигляд мають рівняння відносно решти узагальнених координат. Коефіцієнти d_k обчислюються через обчислені раніше інтеграли від різних комбінацій функцій Бесселя. Отже, якщо відшукати розв'язки диференціальних рівнянь щодо функцій $r_k(t), p_k(t), \quad k=0,1,2$ можна знайти вирази для узагальнених координат потенціалів швидкостей, а, отже, отримати розв'язок системи рівнянь щодо коливань вільної поверхні рідини у рухомій ємкості і дослідити процеси демпфування коливань рідини у ємкості з подальшим оптимальним розташуванням демпфуючих перегородок у рухомій ємкості.

З цією метою запишемо нелінійне диференціальне рівняння (21) (і решту з них за аналогічною схемою) у вигляді

$$\frac{d^2r_1}{dt^2}+\varsigma_1\frac{dr_1}{dt}+\sigma_1^2r_1=H_1\sin\omega t+N_1(t). \tag{22}$$

У цьому рівнянні запроваджено позначення $H_1=H\mu_1\omega^2$, а через $N_1(t)$ позначено нелінійну частину рівняння (21). Нехай $r_1^{(k)}(t)=r_1^{(0)}(t)+r_1^{(k-1)}(t)$, де $r_1^{(0)}(t)$ — розв'язок лінійного диференціального рівняння

$$\frac{d^2r_1}{dt^2}+\varsigma_1\frac{dr_1}{dt}+\sigma_1^2r_1=H_1\sin\omega t. \tag{23}$$

Знайдемо розв'язок цього рівняння за допомогою інтегрального перетворення Лапласа.

$$R_1^{(0)}(p)=\frac{1}{p^2+\varsigma_1p+\sigma_1^2}\frac{H_1\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{A(p+\alpha_1)+Bs_1}{(p+\alpha_1)^2+s_1^2}+\frac{-Ap+D\omega}{p^2+\omega^2}; \tag{24}$$

$$A=\frac{1+b(\sigma_1^2-\omega^2)}{\varsigma_1\sigma_1^2};\quad B=\frac{b-\varsigma_1/2A}{s_1};$$

$$D=\frac{1-b\omega^2}{\omega\sigma_1^2};\ b=\frac{\omega^2-\sigma_1^2+\xi_1^2}{(\omega^2-\sigma_1^2)^2+\varsigma_1^2\omega^2};\quad s_1^2=\sigma_1^2-\varsigma_1^2/4.$$

У просторі оригіналів виразу (24) відповідає такий вираз:

$$r_1^{(0)}(t)=e^{-\alpha_1t}(r0_1\cos s_1t+r0_2\sin s_1t)+r0_3\cos\omega t+r0_4\sin\omega t. \tag{25}$$

$$\alpha_1=\varsigma_1/2,\ r0_1=H_1\omega A,\ r0_2=H_1\omega B,\ r0_3=-r0_1,\ r0_4=H_1\omega D.$$

Оскільки нелінійна частина $N_1(t)$ є функція не тільки $r_1(t)$, а й решти узагальнених координат, пошук розв'язку будемо здійснювати за подвійною ітераційною схемою. Спочатку у нелінійній частині утримуватимемо тільки члени, що містять $r_1(t)$. Підставимо (25) у $N_1[r_1(t)]$. Після простих перетворень отримуємо

$$N_{r_1}(t) = (q_0 + q_1\cos 2s_1 t + q_2 \sin 2s_1 t)e^{-2\alpha_1 t} + q_4\cos(s_1+\omega)t + q_5\sin(s_1+\omega)t + \\ +(q_7\cos(s_1-\omega)t + q_8\sin(s_1-\omega)t)e^{-\alpha_1 t} + q_9 + q_{10}\cos 2\omega t + q_{11}\sin 2\omega t. \tag{26}$$

Коефіцієнти $q_k,\ k=\overline{1,11}$, обчислюються за відповідними алгоритмами. Підставимо отриманий вираз у рівняння (22) і знову застосуємо до нього інтегральне перетворення Лапласа. Після відшукання відповідного оригіналу отримаємо розв'язок $r_1^{(1)}(t)$. На наступному наближенні вирішуємо за аналогічною схемою диференціальне рівняння відносно $p_1^{(0)}(t),\ p_2^{(0)}(t), r_2^{(0)}(t)$і $p_0^{(0)}(t)$. Повторюючи вказану процедуру, отримаємо розв'язки диференціальних рівнянь відносно всіх узагальнених координат у такому вигляді:

$$p_0^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{N_{p_0}} [p0_{3i}^{(k)} + p0_{3i+1}^{(k)}\cos\beta_k t + p0_{3i+2}^{(k)}\sin\beta_k t]e^{-\gamma_k t};$$

$$r_1^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{N_{p_0}} [r1_{3i}^{(k)} + r1_{3i+1}^{(k)}\cos\beta_k t + r1_{3i+2}^{(k)}\sin\beta_k t]e^{-\gamma_k t};$$

$$p_2^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{N_{p_0}} [p2_{3i}^{(k)} + p2_{3i+1}^{(k)}\cos\beta_k t + p2_{3i+2}^{(k)}\sin\beta_k t]e^{-\gamma_k t};$$

$$r_2^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{N_{p_0}} [r2_{3i}^{(k)} + r2_{3i+1}^{(k)}\cos\beta_k t + r2_{3i+2}^{(k)}\sin\beta_k t]e^{-\gamma_k t};$$

$$p_1^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{N_{p_0}} [p1_{3i}^{(k)} + p1_{3i+1}^{(k)}\cos\beta_k t + p1_{3i+2}^{(k)}\sin\beta_k t]e^{-\gamma_k t}.$$

Всі зазначені коефіцієнти обчислюються програмним шляхом за відповідними алгоритмами. Після вирішення цієї задачі маємо вираз для коливань вільної поверхні рідини в ємкості. З урахуванням виразів для узагальнених координат коливань вільної поверхні отримуємо явний вираз для потенціалу швидкостей (13), (18).

На рис. 1, 2 наведено графіки потенціалу швидкостей (повздовжні коливання рідини в рухомій ємності) для випадку, коли в ємності відсутня перегородка ($R_0 = 0$) для фіксованого $x = 0,5$, $h = 0,2$ (рівень заповнення ємності рідиною) та за наявності перегородки ($\delta = R_0/R_1 = 0,4$; $h = 0,4$).

Отримані результати дають змогу вирішити питання оптимального розташування демпфуючих перегородок у ємності з метою мінімізації впливу коливань на рух повітряного судна.

 ISSN 1562-9945

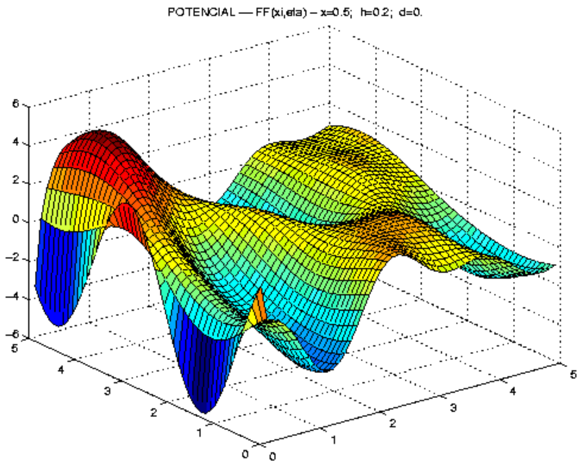

Рис. 1 – Повздовжні коливання рідини без перегородки: $F(\chi, \eta)$

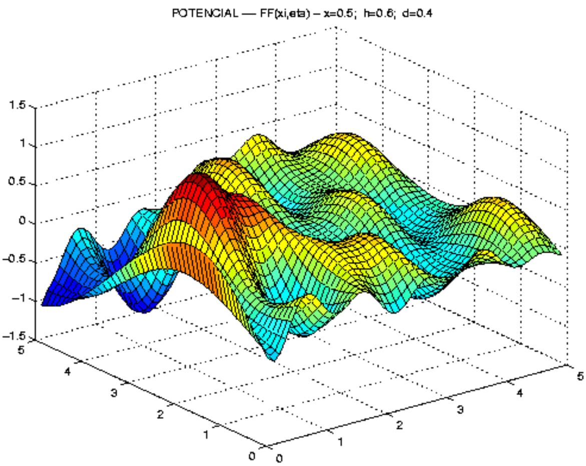

Рис. 2 – Повздовжні коливання рідини з перегородкою: $F(\chi, \eta)$

Література

1. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость.—К.: Наукова думка, 1990.—296 с.
2. Лимарченко О.С. Исследование некоторых нелинейных задач динамики совместного пространственного движения цилиндрического резервуара и частично заполняющей его жидкости.—К.: 1984.—57 с. (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 84.58).
3. Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М., Коц О.П. Комп’ютерні методи прикладної математики.—К.: Академперіодика, 2002.—480 с.
4. Зеленский К.Х., Игнатенко В.Н., Коц А.П. Компьютерные методы прикладной математики. Т.2. Реализация. —К.: Академперіодика, 2000.—280 с.

Получено 09.11.2007

 ISSN 1562-9945