УДК 62.50
А.А. Стенин, А.О. Омельченко, Т.В. Романова, М.А. Солдатова

МЕТОДЫ ТРАНСФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ОБЪЕКТОВ ДВИЖЕНИЯ

1 Введение

Применение математических моделей для моделирования различных режимов динамики технологических процессов и объектов движения, как правило, на практике сопряжено с существенными трудностями их реализации в тренажерных комплексах с жесткими характеристиками. Это, в первую очередь, связано с высоким порядком динамических моделей, которые необходимо многократно моделировать в реальном или ускоренном масштабе времени в условиях заданной структуры и ресурсов конкретного вычислительного устройства тренажерного комплекса. Поэтому на практике рационально допустить некоторое ухудшение качества моделирования, чтобы значительно снизить требования к характеристикам вычислителя. Такой подход является отправным для проведения исследований, связанных с упрощением динамических моделей режимов обучения [1].

2 Методы трансформирования

На этапе разработки математической модели конкретного технологического процесса или объекта движения наряду с теоретическими вопросами (выбор математического аппарата, системы координат и т.д.) приходится решать и практические задачи, связанные с выбором структуры и переменных состояния.

Очевидно, целесообразным является выбор такой модели и структуры, которые бы описывались минимальным числом переменных без изменения физической сути динамического объекта.

Вопрос о применимости определенной упрощенной схемы зависит от специфических свойств конкретного динамического объекта и должен решаться в каждом конкретном случае самостоятельно.

Агрегирование параметров

Одним из направлений построения упрощенных моделей являются методы, основанные на сокращении размерности вектора состояний. Такая возможность, в частности, появляется в тех случаях, когда разработчик, учитывая потребности каналов управления по обратным связям в конкретных компонентах вектора состояния, искусственно выделяет “главную” и “второстепенную” для отдельных режимов функционирования динамического объекта части фазового вектора состояния. Такое направление относится к агрегированию параметров, сущность которого можно сформулировать следующим образом: если система имеет значительное количество параметров, то возникает потребность перейти к укрупненным величинам, так называемым агрегатам, число которых значительно меньше по сравнению с исходными переменными.

Другими словами системе S_1 с n-мерным вектором состояния $\overline{x}$ сопоставляется система S_2 с вектором $\overline{z}$ размерности $l < n$. Таким образом, система S_2 может рассматриваться в качестве приближенной модели для S_1 и в рамках такой более грубой модели имеется возможность дать исчерпывающий анализ ее функционирования [2].

Пусть задана динамическая система вида

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \tag{1}$$

где $\bar{x} \in R^n, \bar{u} \in U \subset R, t \in T$, матрицы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ – постоянные матрицы размера $(n \times n), (n \times r)$ и U – замкнутое ограниченное множество в R^r.

Считаем, что в каждый момент времени t надо знать не все координаты вектора фазового состояния $\bar{x}$, в котором находится система (1), а лишь некоторый набор $\bar{z}$, скалярных величин $z_1, \ldots, z_\nu$, число которых $\nu < n$ и которые характеризуют текущее состояние $\bar{x}$ с допустимой разработчиком точностью.

Суть метода заключается в следующем.

Стационарная линейная динамическая система (1) путем преобразования $\dot{\bar{z}}(t) = A_z\bar{z}(t) + B_z\bar{u}(t), \bar{z}(t_0) = \Pi\bar{x}(t_0) = \Pi\bar{x}^0$. Здесь матрицы A_z и B_z определяются условиями: $A_z\Pi = \Pi A, B_z = \Pi B$. В случае, когда матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{\Pi}$ удовлетворяют соотношению $\Pi A = \Pi A\Pi^T(\Pi\Pi^T)^{-1}\Pi$, матрицу состояния агрегированного фазового вектора состояния можно представить в виде [3].

$$A_z = \Pi A\Pi^T(\Pi\Pi^T)^{-1},$$

где, Π^T – транспонированная матрица $\boldsymbol{\Pi}$.

Основным содержанием формирования модели является вектор матрицы агрегирования $\boldsymbol{\Pi}$. Предлагается подход, основанный на минимизации квадрата ошибки решения агрегированной задачи относительно исходной. Формируя решение уравнения

$$\dot{\bar{e}}(t) = A_z\bar{e}(t) + (A_z\Pi - \Pi A)\bar{x}(t),$$

где $\bar{e}(t) = \bar{z}(t) - \Pi\bar{x}(t)$, получим

$$\bar{e}(t) = \ exp[A_z(t - t_0)]\bar{e}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_f} \exp[A_z(t - \xi)](A_z\Pi - \Pi A)\bar{x}(\xi)d\xi \tag{2}$$

и, построив квадратную функцию от (2)

$$\sigma[\bar{e}(t)] = \bar{e}^T(t) \cdot \bar{e}(t),$$

 ISSN 1562-9945

можно выбирать матрицу агрегации Π из условия минимума (2) посредством традиционного градиентного метода

$$\Pi^{(k+1)} = \Pi^{(k)} - m^{(k)}[grad_{\Pi}\sigma(\bar{e})]^{(k)},$$

где $m^{(k)}$ – весовой коэффициент, определяемый практическими соображениями сходимости итерационной процедуры.

Агрегирование структуры

При наличии большого числа управляющих воздействий целесообразным является упрощение структуры самого оптимального регулятора, что также приводит к улучшению скоростных характеристик программного обеспечения тренажерных комплексов.

Действительно, поскольку оптимальное управление представляет собой линейную комбинацию всех координат вектора $\bar{x}(t)$, взвешенную с коэффициентами K[4], то между i-той составляющей вектора $\bar{u}(t)$ и j-й составляющей вектора $\bar{x}(t)$ существует связь, характеризуемая коэффициентами k_{ij}, причем при больших m и n, число таких связей $N = n \times m$ велико, что значительно усложняет техническую реализацию регулятора и снижает надежность. В связи с этим и возникает задача выявления таких связей, которые можно исключить, не ухудшая при этом значительно качество регулирования.

Математически данная задача может быть сформулирована следующим образом.

Представим элементы матрицы обратных связей K в системе (1) в виде произведения двух величин

$$k_{ij} = y_{ij}z_{ij}, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

где величины z_{ij} принимают одно из двух значений – 0 или 1. Если $z_{ij} = 1$, то в регуляторе между u_i и x_i имеется связь, характеризуемая коэффициентом $y_{ij},$ если же $z_{ij} = 0$, то такая связь отсутствует. Составляя из $y_{ij},$и z_{ij} $(m \times n)$ – матрицы Y и Z соответственно, соотношение (3) можно записать в виде:

$$K = K(Y, Z) = Y \times Z \qquad (4)$$

При этом регулятор, формируемый с помощью матрицы Y и Z , называется “допустимым”, если для него справедливо неравенство

$$I(Y, Z) \leqslant (1 + \varepsilon)Iopt, \qquad (5)$$

где ε – заданное малое число, которое характеризует допустимое ухудшение качества регулирования.

В общем случае, выполнение этого неравенства может зависеть от начальных условий $\overline{x}(t_0)$. Однако предположение о том, что начальные условия являются случайными и распределены нормальному закону позволяет выразить (5) через вторые моменты. Основная трудность в данном случае заключается в том, что зависимость $I(Y, Z)$ от элементов матрицы Z оказывается очень сложной и каких – либо общих закономерностей выявить не удается. В частности, совершенно не очевидно, что исключение какой – либо связи в регуляторе обязательно приводит к ухудшению качества регулирования. Поэтому точное решение этой задачи можно получить только в результате полного перебора всех возможных матриц Z и вычисления соответствующих значений $I(Y, Z)$, что практически достаточно сложно при высоком порядке системы (1).

Выбор матрицы Y осуществляется из условия

$$I(K_{opt}, Z) = \min_{k} I(K, Z) \tag{6}$$

с использованием любого эффективного метода поиска минимума функции или многих переменных, причём минимизация осуществляется по элементам Y, соответствующим единичным элементам Z.

Агрегирование управляющих воздействий

Представим систему (1) в виде

$$\begin{gathered}\dot{\bar{x}}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_{2,} \ldots, u_m, t),\ i \in [l, r],\\ \bar{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_e, t),\ i \in [r + l, n],\\ I(\overline{x}, \overline{u}) = W[\overline{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{tf} (x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t)dt\end{gathered} \tag{7}$$

где $m < l$, $r < n$, f_0 не зависит от компонент u_{m+1}, $u_{m+2}, \ldots, u_l$ вектора управлений.

Путём замены переменных

$$\widetilde{x}_1 = x_1, \ldots \widetilde{x}_r = x_r, \widetilde{u}_1 = u_1, \ldots, \widetilde{u_m} = u_m, \widetilde{u}_{m+1} = x_{r+1}, \ldots, \widetilde{u}_j = x_n,$$

где $j = m + n - z$,
формируется агрегированная задача

$$\begin{aligned}&\dot{\widetilde{x}}_i = f_i(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_r, \widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_j, t),\ i \in [l, r],\\ &I(\widetilde{x}, \widetilde{u}) = W_\varepsilon[\widetilde{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{tf} f_0^\varepsilon(\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_r, \widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_j, t)dt\end{aligned}$$

причём $W_\varepsilon[\widetilde{x}(t_f)] < W[\widetilde{x}(t_f)]$, $f_0^\varepsilon(\widetilde{x}, \widetilde{u}, t) < f_0(\widetilde{x}, \widetilde{u}, t)$.

Таким образом, часть переменных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{n,}$ которые в исходной задаче являются переменными состояния, в агрегированной задаче становится компонентами вектора управлений, при этом сокращается размеренность оптимизируемой системы. Поиск решения исходной задачи осуществляется на основе решения агрегированной задачи так, чтобы минимизировать невязку вида

$$|I(\overline{x}, \overline{u}) - I_\varepsilon(\widetilde{x}, \widetilde{u})| \to \min$$

Далее восстанавливается решение исходной задачи путём обратного преобразования для оптимального решения агрегированной задачи

$$\begin{aligned}&x_i^*(t) = x_i^{opt}(t),\ i \in [l, r],\\ &x_i^*(t) = \widetilde{u}_{m+i}^{opt}(t),\ i \in [r + l, n],\\ &u_i^*(t) = \widetilde{u}_{m+i}^{opt}(t),\ i \in [l, m],\end{aligned}$$

 ISSN 1562-9945

после чего решается задача аппроксимации полученного решения функциями $\overline{x}(t)$ и $\overline{u}(t)$ (4), которые доставляют минимум функционалу (7).

Заключение

Выбор метода трансформирования, в первую очередь, определяется математической моделью реального технологического процесса или объекта движения, а также требованиями разработчика к точности моделирования функционирования этих динамических объектов в различных режимах их работы.

Литература

1. Шукшинов В.Е. и др. Тренажёрные системы-М.: Машиностроение, 1981, 256 с.
2. Стенин А.А. Автоматизированные обучающие системы (анализ и синтез) – Луганск, изд-во ВУГУ, 2000, 109 с.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Гл. редакция физико – математической литературы. “Наука”, 1975, 632 с.
4. Атанс М., Фалб П.. Оптимальное управление – М.: Машиностроение, 1968, 764 с.

Получено 09.11.2007