УДК 519.863

О.А. Стенін, В.Л. Шевченко, К.Ю. Мелкумян, В.П. Пасько

ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ СИНЕРГЕТИЧНОЇ SL-АПРОКСИМАЦІЇ В ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РОЗВИТКУ БАГАТОВИМІРНИХ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Постановка проблеми

Метою статті є розробка методу побудови та пониження порядку моделей систем, ефект діяльності яких не може бути вираженим у матеріальних фізичних категоріях. Ключовим елементом моделей необхідно обрати той, що має фізичну наочність, дозволяє легко узагальнювати залежності щодо діяльності складних систем та будувати відповідні оптимізаційні процедури.

Сучасні вимоги до оперативності прийняття управлінських рішень роблять актуальною розробку комп’ютеризованих систем підтримки прийняття рішень, ключову роль в яких грають компоненти прогнозного моделювання. Поширеною є ситуація, коли чисельні процедури працездатні на модельних прикладах, але втрачають працездатність при збільшенні розмірності моделей реальних систем. У цьому разі виникає так зване “прокляття розмірності”[1]. В контексті даного дослідження прогнозне моделювання складної системи виконується для пошуку або підтвердження правильності обрання альтернативи рішення на рівні системи в цілому або на рівні найбільш вагомих її компонент. При цьому існує припущення щодо оптимальності підлеглих складових процесів.

Метою функціонування складної системи є створення деякого корисного ефекту. В практичних задачах критерій максимуму корисного ефекту використовується дуже часто. Будь-яка процедура оптимізації може дати результат лише за умови чіткого формального визначення залежності ефекту системи від вхідних ресурсів. У комерційних та виробничих системах ефектом діяльності є фізично наочні та зрозуміли показники, наприклад, прибуток або обсяг виробництва. У більшості державних структур ефект діяльності є нематеріальним (наприклад, рівень безпеки, що забезпечують силові структури) та визначається за непрямими оцінками відповідності діяльності організації встановленим нормативам. Звичайно для такої оцінки використовується лінійна згортка показників з ваговими коефіцієнтами [2, 3]. Але цей підхід не враховує обмеження на показники та може призвести до збільшення розмірності системи.

Актуальною є задача розвитку та обґрунтування доцільності застосування методів пониження розмірності моделей з урахуванням оптималь-

 ISSN 1562-9945

ності окремих складових складної системи, що моделюється за критерієм максимуму ефекту при обмеженні на ресурси.

Корисні ефекти діяльності складових елементів системи можна задати логістичними залежностями [4, 5], наприклад, у формі SL-функцій [6] $SL(x) = \frac{a}{1+e^{-\frac{2}{T}\cdot(x-\Delta x)}}$, де a, T, Δx — константи, — вхідний ресурс. Задання залежностей часткових корисних ефектів $E\mathbf{f}$ у вигляді SL-функцій $E\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = SL(\mathbf{x}_i)$ від таких вхідних ресурсів $_i$ як витрати на персонал, на підвищення кваліфікації, на обладнання, розглянуто в [6, 7]. На вищих рівнях ієрархій ефекти визначаються мультиплікативними згортками для систем, ефект яких суттєво залежить від кожного складового елементу, і адитивними для систем, в яких елементи структури в згортці з точки зору критерію взаємозамінні, або коли задачі окремих елементів структури між собою не зв'язані, хоча і виконуються в інтересах єдиної цілі. Оптимальний за максимумом ефекту розподіл коштів між елементами ієрархічної структури для адитивних та мультиплікативних згорток був проведений методами прямого перебору, покоординатного спуску та індиферентного заглиблення. Аналіз знайдених рішень дозволив виявити ефект самоорганізації логістичних згорток та сформулювати відповідне правило [8].

Правило щодо самоорганізації логістичних згорток

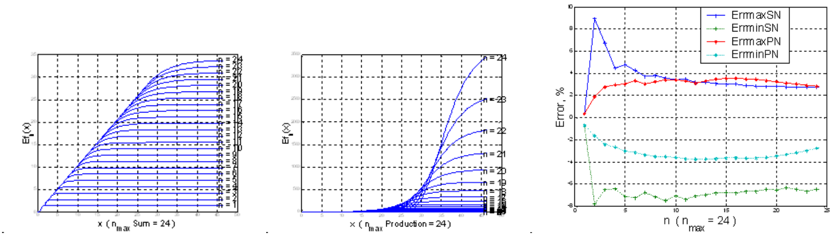
Якщо $\sum\limits_{i=1,n} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 = \mathrm{const}$, то для множини логістичних функцій $SL_i(\mathbf{x}_i)$, $i = 1,n$ можуть бути знайдені такі апроксимуючі логістичні функції $SL_{R1}(\mathbf{x}_0)$ та $SL_{R2}(\mathbf{x}_0)$, що $\max\limits_{X} \prod\limits_{i=1,n} SL_i(\mathbf{x}_i) \approx SL_{R1}(\mathbf{x}_0)$ та $\max\limits_{X} \sum\limits_{i=1,n} SL_i(\mathbf{x}_i) \approx SL_{R2}(\mathbf{x}_0)$.

Синергізм не може бути абсолютним та має визначатись відносно постановки певної фізичної задачі. Для цього введемо поняття ступеню синергізму, який визначатиме похибку апроксимуючої синергетичної залежності відносно функції згортки ефектів. В роботі досліджено залежність ступеню синергізму від зміни параметрів функцій ефектів окремих елементів $E\mathbf{f}_1 = E\mathbf{f}_1(\mathbf{x})$. Базовими є згортки ефектів n однакових елементів $E\mathbf{f}_0 = E\mathbf{f}_0(\mathbf{x})$, де $\mathbf{x}$ – вхідний ресурс (рис. 1). Як бачимо, ступінь синергізму згорток збільшується при збільшенні n.Тут та надалі графіки, які відносяться до адитивних та мультиплікативних згорток помічаються відповідно символами "S", "SN" (Sum) або "P", "PN" (Product).

Розтягнення графіку вздовж вісі абсцис $\frac{dEf_1}{dx} < \frac{dEf_0}{dx}$ та вздовж вісі ординат $\frac{dEf_1}{dx} > \frac{dEf_0}{dx}$ змінює ефективність модифікованої системи.

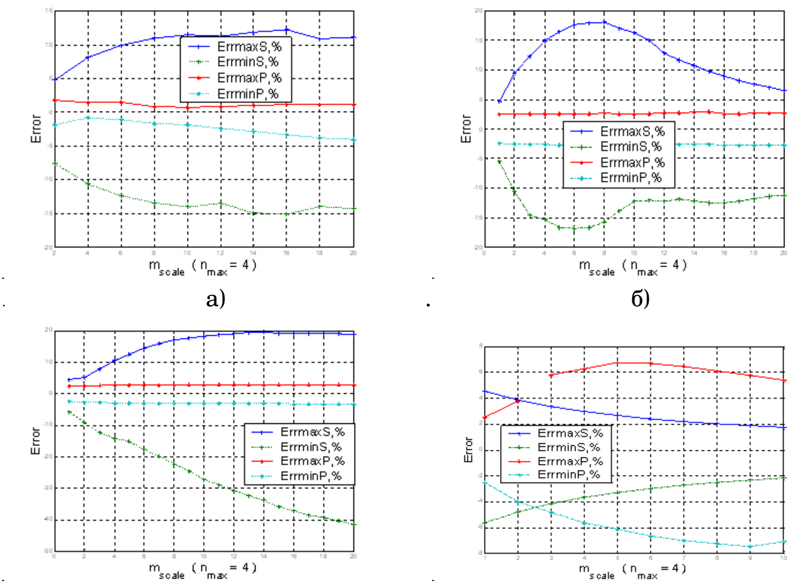
Одночасне розтягнення графіку за двома координатами призводить до похибки меншої у порівнянні з розтягненням за окремими вісями (табл. 1).

Зсув графіку вздовж вісі абсцис збільшує граничний бар'єр вкладень ресурсів для початку ефективної дії. Після подолання означеного бар'єру зріст $E\mathbf{f}_1$ відбувається аналогічно $E\mathbf{f}_0$ за звичайною ефективністю $dE\mathbf{f}_1/d\mathbf{x} = dE\mathbf{f}_0/d\mathbf{x}$. Ситуація характерна для тривалого недосконалого



а) б) в)

Рис. 1 – Функції ефектів $E\mathrm{f}_0$ діяльності $n(1-24)$ елементів від обсягів фінансування та похибки апроксимації а) $E\mathrm{f}_0$ (адитивна згортка; б) $E\mathrm{f}_0$ (мультиплікативна згортка; в) максимальна (*Errmax*) та мінімальна (*Errmin*) похибки апроксимації в залежності від кількості елементів



а) б)

в) г)

Рис. 2 – Максимальна (Errmax) та мінімальна (Errmin) похибки апроксимації згорток в залежності від вхідних ресурсів: а) розтягнення вздовж вісі абсцис; б) розтягнення вздовж вісі ординат; в) зсув вздовж вісі абсцис; г) зсув вздовж вісі ординат

Таблиця 1

Максимальні похибки

Межа подібності підрозділів	3	4	5	5
Вид згортки	Адитивна	Мультиплікативна	Адитивна	Мультиплікативна
Вид модифікації залежності ефекту				
Розтягнення по вісі абсцис	11%	2%	15%	4%
по вісі ординат	15%	2.6%	16.5%	2.6%
по вісям абсцис та ординат	9%	2%	10%	2%
Зсув по вісі абсцис	12%	3%	15%	3%
по вісі ординат	6%	6%	6.5%	7.5%

ресурсного забезпечення або нецільового витрачання коштів. Зсув графіку вздовж вісі ординат можливий, якщо в силу специфічних умов функціонування системи, окремі її елементи мають ненульовий ефект при нульових вхідних ресурсах, наприклад, ефект праці персоналу при нересурсної стимуляції або очікуванні стимуляції [7].

Якщо параметри елементів відрізняються на порядок, похибка може досягати 35%. Але раціональною можна вважати систему, в якій на одному рівні ієрархії взаємодіють елементи, які можна порівнювати за їх ефектами. Критична межа подібності має бути не більше 4-5 (табл. 1). Інакше лідер буде працювати замість тих, хто відстає.

Похибка апроксимації *мультиплікативної* згортки в більшості випадків не перевищує 2-4 % та рідко досягає 7.5%. Це важливо, оскільки у практичних багатовимірних задачах мультиплікативна згортка зустрічається набагато частіше адитивної. Ступінь синергізму *адитивної* згортки менше, але при зростанні вкладених вхідних ресурсів вона відчутно зростає.

Окремі параметри апроксимуючих кривих можуть бути визначені аналітично (табл. 2).

Аналітичні викладки важливі з точки зору зменшення витрат машинного часу при чисельному моделюванні. Для подальшого аналітичного дослідження властивостей згорток дамо основні визначення та доведемо необхідні умови прояви ефекту самоорганізації.

Під *згорткою* $\aleph$ *функцій* $\mathbf{f}_i, i = 1, n$ від аргументів x_i розуміємо багатовимірну функцію $\mathbf{f}_0^n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \ldots, \mathbf{x}_n) = \underset{i=1,n}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i))$ від аргументів $\mathbf{x}_i, i = 1, n$ в яку функції $\mathbf{f}_i$, входять за єдиними для всіх $i = 1, n$ правилами, які

Таблиця 2

Аналітично визначені параметри апроксимуючих кривих

Параметри апроксимуючої функції	Для адитивної згортки	Для мультиплікативної згортки
d_0	$\sum\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$	$\prod\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$
a_0	$\sum\limits_{i=\overline{1,n}} a_i$	$\prod\limits_{i=\overline{1,n}} a_i$

визначаються властивостями певної згортки $\aleph$.

Якщо аргументи згортки можуть бути виражені функціями єдиного аргументу $\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0^n), i = \overline{1,n}$, то така згортка може розглядатись як функція одного аргументу $\mathbf{f}_0^n(\mathbf{x}_0^n) = \underset{i=\overline{1,n}}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0^n)))$, де нижні індекси позначають порядковий номер елементу, 0 – визначає результуючий ресурс або узагальнюючу функцію, верхній індекс позначає загальну кількість елементів в структурі до якої має відношення певний елемент або загальний результат.

1. *Монотонно зростаючою* будемо називати згортку $\underset{i=\overline{1,n}}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i))$, для якої справедливе твердження: якщо кожна функція $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i), i = \overline{1,n}$ є монотонно зростаючою, тобто $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i + \mathbf{\Delta x}_i) \geq \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$ [9], то $\underset{i=\overline{1,n}}{\aleph} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i + \mathbf{\Delta x}_i) \geq \underset{i=\overline{1,n}}{\aleph} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$, де $\mathbf{\Delta x}_i \geq 0$.

2. *Неперервною* будемо називати таку згортку, для якої справедливе твердження: якщо функції $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$, $i = \overline{1,n}$ —неперервні, тобто для $\forall \sum > 0 \exists \mathbf{\Delta x}_i \geq 0$, $|\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i + \mathbf{\Delta x}_i) - \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)| < \sum, i = \overline{1,n}$ [9], то згортка $\mathbf{f}_0^n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n) = \underset{i=\overline{1,n}}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i))$ є функцією неперервною за кожною координатою $\mathbf{x}_i$, тобто $\forall \sum > 0 \exists\ \mathbf{\Delta x}_i \geq 0$, $|\underset{i=\overline{1,n}}{\aleph}(\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1), \ldots, \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i + \mathbf{\Delta x}_i), \ldots, \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n)) - \underset{i=\overline{1,n}}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i))| < \sum, i = \overline{1,n}$.

Також вірним буде $\forall \sum > 0 \exists \mathbf{\Delta x}_i \geq 0, |\underset{i=\overline{1,n}}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i + \mathbf{\Delta x}_i)) - \underset{i=\overline{1,n}}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i))| < \sum, i = \overline{1,n}$, де хоча б один $\mathbf{\Delta x}_i > 0$.

Якщо, крім того існують неперервні функції $\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0^n), i = \overline{1,n}$, то згортка $\mathbf{f}_0^n(\mathbf{x}_0^n) = \underset{i=\overline{1,n}}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0^n)))$ є неперервною одномірною функцією, тобто $\forall \sum > 0 \exists \mathbf{\Delta x}_0^n \geq 0, |\underset{i=\overline{1,n}}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0^n + \mathbf{\Delta x}_0^n))) - \underset{i=\overline{1,n}}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0^n)))| < \sum, i = \overline{1,n}$.

Наприклад, неперервність адитивної та мультиплікативної згорток можуть бути доведено з теореми про неперервність суми, різниці та добутку неперервних функцій [9].

3. Згортка $\aleph$ є *рекурентною* або має властивість *накопичування* потенціалу (ефекту та ін.) якщо $\underset{i=\overline{1,n}}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)) = \underset{i=\overline{1,n}}{\aleph}(\underset{i=\overline{1,n}}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)), \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n))$.

Рекурентними є такі прості згортки, як адитивна, мультиплікативна та такі складні згортки:

- ієрархічні комбінованого типу, коли на одному рівні ієрархії в одній

 ISSN 1562-9945

гілці присутні лише згортки одного елементарного типу (адитивні або мультиплікативні);

- до яких було застосовано монотонне перетворення, наприклад, адитивно-логарифмічна, тобто мультиплікативна згортки, до якої застосована операція логарифмування.

Нерекурентними є будь-які усереднюючи згортки. Наприклад, елемент $\underset{i=1,n-1}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i))$ на попередньому кроці згортання був усереднений за величиною $n-1$, елемент $\mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n)$ не усереднювався (усереднення за величиною 1). На n-му кроці обидва елементи будуть усереднені за величиною 2, що призведе до невірного обчислювання середніх показників. Виникає необхідність модифікації згортки шляхом ускладнення процедури усереднення, наприклад, за допомогою коефіцієнтів усереднення, які змінюються відповідно до попередньої історії елементів згортки.

Надалі розглядаємо лише неперервні монотонно-зростаючі функції та неперервні монотонно-зростаючі рекурентні згортки.

Теорема 1. *Про монотонність оптимальної згортки двох монотонних функцій.*

Якщо $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i), i=1,2$ неперервні монотонно зростаючі, $\sum\limits_{i=1,2}\mathbf{x}_i=\mathbf{x}_0=$ const, то $\mathbf{f}_0^2(\mathbf{x}_0^2)=\max\limits_{x_i,i=1,2}\underset{i=1,2}{\aleph}\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$ — неперервна монотонно зростаюча функція.

Доведення

1. *Неперервність.* $\mathbf{x}_1$ та $\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_0--\mathbf{x}_1$ неперервні. $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2$ неперервні за визначенням. Отже $\mathbf{f}_0^2(\mathbf{x}_0^2)=\underset{i=1,2}{\aleph}\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$ неперервна.

2. *Монотонність.* Нехай $\mathbf{x}_0$ отримує скінченне прирощення $\mathbf{\Delta x}_0=\mathbf{\Delta x}_1+\mathbf{\Delta x}_2$, де співвідношення $\mathbf{\Delta x}_1$ и $\mathbf{\Delta x}_2$ є довільним. Оскільки $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2$ монотонно зростають $(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i+\mathbf{\Delta x}_i)\geq\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i), i=1,2)$, то за визначенням монотонної згортки (незалежно від співвідношення між $\mathbf{\Delta x}_1$ и $\mathbf{\Delta x}_2$) .

$$\underset{i=1,2}{\aleph}(f_i(x_i+\Delta x_i)\geq\underset{i=1,2}{\aleph}\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i) \tag{1}$$

Для всіх $i=1,2$ оптимальні прирощення за координатами $\overline{\Delta x_i}$ є підмножинами множин $\Omega_{\Delta x_i}$ можливих значень $\mathbf{\Delta x}_i$ при певних $\mathbf{\Delta x}_0$ $(\overline{\Delta x_i}\subset\Omega_{\Delta x_i})$. Отже, для $\overline{\Delta x_i}$ справедливе (1), але $\underset{i=1,2}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i+\overline{\Delta x_i}))=\max\limits_{x_i+\Delta x_i,i=1,2}\underset{i=1,2}{\aleph}\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$, тобто оптимальна згортка $\max\limits_{x_i^+\Delta x_i,i=1,2}\underset{i=1,2}{\aleph}\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)\geq\underset{i=1,2}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i))$ є монотонно-зростаючою за кожною координатою.

З урахуванням $\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_1$, виразимо згортку у вигляді функції аргументів $\mathbf{x}_{0,}\mathbf{x}_1$. Для кожного $\mathbf{x}_0$ існує $\mathbf{x}_1$, що максимізує згортку. Тобто, можна вважати $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ функціями від $\mathbf{x}_0$ та виразити функцію оптимальної величини згортки у вигляді функції одного аргументу $\mathbf{f}_0^2(\mathbf{x}_0)=\max\limits_{x_i,i=1,2}\underset{i=1,2}{\aleph}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0)))$.

Припустимо, що при деякому $\mathbf{x}_0$ оптимальними були $\overline{x}_1, \overline{x}_2$. Нехай $\mathbf{x}_0$ отримує прирощення $\mathbf{\Delta x}_0$, яке має розподілитись оптимально між координатами $\mathbf{x}_1$ та $\mathbf{x}_2$. Оптимальні прирощення $\overline{\Delta x}_1$, $\overline{\Delta x}_2$ можуть відбуватись за окремими координатами або за обома координатами одночасно. Оскільки, як було відмічено вище, $\max\limits_{x_i, i=1,2} \aleph\limits_{i=1,2}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0)))$ монотонно зростає за кожною координатою, то у всіх варіантах розподілу прирощення за координатами, загальна величина згортки буде зростати.

Отже зростання $\mathbf{x}_0$ веде до зростання $\max\limits_{x_i, i=1,2} \aleph\limits_{i=1,2}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0)))$ та функція $\mathbf{f}_0^2(\mathbf{x}_0) = \max\limits_{x_i, i=1,2} \aleph\limits_{i=1,2}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0)))$ є монотонно зростаючою. Теорему доведено.

Якщо $\mathbf{x}_1$ та $\mathbf{x}_2$ — вхідні ресурси, а $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0))$ — монотонно-зростаючі функції ефектів, то за фізичним змістом збільшення загального вхідного ресурсу має привести до приросту загального корисного ефекту $\mathbf{f}_o^2(\mathbf{x}_o)$.

Теорема 2. *Про монотонність оптимальної згортки n монотонних функцій.*

Якщо $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i), i = 1, n$ неперервні монотонно зростаючі, $\sum\limits_{i=1,n} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 =$ const, то $\mathbf{f}_o^n(\mathbf{x}_o^n) = \max\limits_{x_i, i=1,n-1} \aleph\limits_{i=1,n-1}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i))$ є неперервною монотонно зростаючою.

Доведення

1. *Неперервність*. Для всіх $i = 1, n \mathbf{x}_i$ та $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$ неперервні. Отже $\mathbf{f}_o^n(\mathbf{x}_o^n) = \aleph\limits_{i=1,n}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i))$ також є неперервною.

2. *Монотонність*. Припустимо, що існує згортка

$$\mathbf{f}_o^{n-1}(\mathbf{x}_o^{n-1}) = \max_{x_i, i=1,n-2} \aleph_{i=1,n-2}(\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)) \tag{2}$$

яка є монотонно зростаючою функцією при будь-яких $\mathbf{x}_o^{n-1}$, які задовольняють умові

$$\mathbf{x}_o^{n-1} = \sum_{i=1,n-1} \mathbf{x}_i = \text{const}. \tag{3}$$

Нехай $\mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n)$ монотонно зростаюча. Відповідно до визначення рекурентної згортки

$$\mathbf{f}_o^n(\mathbf{x}_o^n) = \max_{x_n} \aleph_{(} \mathbf{f}_o^{n-1}(\mathbf{x}_o^{n-1}), \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n)) \tag{4}$$

$$\mathbf{x}_o^{n-1} + \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_o^n = \mathit{const}. \tag{5}$$

Оптимальне значення $\mathbf{x}_o^{n-1}$ в згортці з n елементів буде відрізнятись від оптимального $\mathbf{x}_o^{n-1}$ в згортці з $n-1$ елементів, але в обох випадках оптимальна залежність $\mathbf{f}_o^{n-1}(\mathbf{x}_o^{n-1})$ буде однаковою. Різними будуть оптимальні точки на цій залежності.

Якщо позначити $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^n$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0^{n-1}$, $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_n$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_0^{n-1}$ та якщо $\mathbf{f}_o^{n-1}(\mathbf{x}_o^{n-1})$ та $\mathbf{f}_n(\mathbf{x}_n)$ монотонно зростаючі, то згідно теореми 1 монотонно зростаючою буде оптимальна функція $\mathbf{f}_o^n(\mathbf{x}_o^n)$.

Функція $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1)$ монотонно зростаюча за визначенням. Методом математичної індукції виводимо, що монотонно зростаючими будуть $\mathbf{f}_o^n(\mathbf{x}_o^n)$

 ISSN 1562-9945

для всіх $n >0$. Теорему доведено.

Аналогічно доводиться теорема про сувору монотонність згорток.

Теорема 3. Про *сувору монотонність згорток n суворо монотонних функцій.*

Якщо $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i), i = \overline{1,n}$ неперервні, суворо монотонно зростаючі, $\sum\limits_{i=\overline{1,n}} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 = \mathrm{const}$, то $\mathbf{f}_o^n(\mathbf{x}_o^n) = \max\limits_{x_i, i=\overline{1,n-1}} \aleph\limits_{i=\overline{1,n-1}} \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$ також є безперервною, суворо монотонно зростаючою.

В теоремах 2, 3 загальний вигляд $\mathbf{f}_o^n(\mathbf{x}_o^n)$ залежить від вигляду функцій $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i)$, $i = \overline{1,n}$. Справедливість теореми 3 є необхідною умовою справедливості правила щодо самоорганізації логістичних згорток. Дійсно логістична SL-функція безперервні суворо-монотонно-зростаючою, а адитивна та мультиплікативна згортки є безперервними, монотонними, рекурентними. Теореми 1,2,3 також можуть бути використані для визначення властивостей згорток логістичних SL-функцій. Основним досягненням, що очікується отримати за допомогою теорем 1, 2, 3 має бути розповсюдження синергетичних властивостей адитивних та мультиплікативних згорток на більш складні види згорток, які відповідають вимогам монотонності (суворої монотонності), безперервності, рекурентності.

Висновки

У роботі показані синергетичні властивості логістичних згорток, досліджено залежність ступеню синергізму від параметрів логістичних залежностей і узагальнені властивості згорток. Узагальнення властивостей згорток дозволяє розповсюдити вже відомі властивості адитивних та мультиплікативних згорток на інші класи згорток. Серед цих важливих властивостей є рекурентна властивість згортки, яка більш відома у вигляді методу індиферентного заглиблення.

В подальших дослідженнях як функції, що згортаються, слід розглянути кусково-неперервні функції з розривами першого роду. Крім того дослідження слід поширити на відомі властивості адитивних та мультиплікативних згорток на інші класи згорток стосовно конкретних прикладних задач.

Література

1. Беллман Р. Динамическое програмирование. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. - 400 с.
2. Основы теории и методологии планирования строительства Вооруженных Сил Российской Федерации /А.В. Квашнин, В.И. Останков, В.Л. Манько и др.; Под ред. А.В. Квашнина.- М.: Воентехиздат, 2002. - 232 с.
3. Облік оборонних ресурсів за допомогою формуляра військової частини. Частина 1. Методики опрацювання формуляра: Монографія / В.Л. Шевченко, Є.Ф. Шелест, Р.М. Федоренко та ін. /За ред. Є.Ф. Шелеста, В.Л. Шевченка. – К.: ННДЦ ОТ і ВБ України, ГШ ЗС України, 2003. – 160 с.

4. Verhulst P.F. Notis surla quela population suit dans son acoroissement // Corresp. Math. Phys. 10, 1838. - P. 113 - 121.

5. Pearl R., Reed L.I. On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation. – Proc.Nat.Acad.Sci., (Wash) 6, 1930. - P. 275 - 288.

6. Шевченко В.Л. Застосування залежностей з обмеженням зросту для спрощення побудови прогнозуючих моделей воєнно-економічних процесів// Збірник наукових праць. Вип. 4 (24) / Редкол.: Шпура М.І. (голова) та ін. – Київ: ННДЦ ОТ і ВБ України, 2004. – С. 102 - 110

7. Шевченко В.Л. Врахування суб'єктивних факторів при моделюванні економічної безпеки// Зб.наук. праць. Недержавна система безпеки підприємництва як суб'єкт національної безпеки України. Спеціалізов. вип. за матер. наук.-практ. конф. 16-17 травня 2001 р., Київ, видавництво Європейського університету, 2001. - С. 218 - 224.

8. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику: Учеб. Руководство. - М.: Наука. Гл. Ред.физ.-мат.лит., 1990. - 272 с.

9. Банах С. Дифференциальное и интегральное исчисление.- М.: Наука. Гл. Ред.физ.-мат.лит., 1966.- 436 с.

 ISSN 1562-9945