УДК 681.50

К.Х. Зеленський, В.М. Ігнатенко, О.А. Стенін

ОПТИМАЛЬНЕ ЗА ВИТРАТАМИ ПАЛИВА ПРОГРАМНЕ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ З ТРАНСПОРТНИМ ЗАПІЗНЮВАННЯМ

Питанням програмного оптимального керування присвячена досить велика кількість праць [3,6,9,10], при цьому у більшості з них під оптимальним програмним керуванням мається на увазі визначення у функції часу такого керуючого впливу і відповідної до нього фазової траєкторії об'єкта, які є розв'язок заданої оптимізаційної задачі.

Найближчими до класу задач на оптимум витрат палива є задача максимальної швидкодії [5,6]. Ця близькість обумовлена низкою факторів і, зокрема, тотожним характером зміни керуючого впливу на відповідних ділянках отриманого руху системи. Виходячи із цього, візьмемо за основу методику синтезу оптимальних керуючих впливів, запропонованих в [6] для систем із максимальною швидкодією і адаптуємо її до задач на оптимум витрат палива. При цьому основними відмінними особливостями, які знаходять своє відображення у методиці побудови оптимальних за витратами палива керувань, є наступні:

1. рух системи керування з транспортним запізнюванням описуються диференціальними рівняннями із загаяним аргументом, що примушує використовувати відповідні правила їх інтегрування;
2. оптимальні за витратами палива керування відрізняються від подібних до них керувань у системах із максимальною швидкістю як числом рівнів, так й інтервалів їхньої знакосталості. Це призводить до збільшення як розмірності оптимізаційної задачі, так і до неоднорідності розв'язку рівнянь динаміки систем керування;
3. внаслідок збільшення числа рівнів та інтервалів оптимального керування зростає число шуканих параметрів, якими є відповідні моменти перемикання та сталі інтегрування рівнянь динаміки систем керування. Це призводить до суттєвої залежності розв'язку даної оптимізаційної задачі від додаткових умов, які випливають із принципу максимуму [2], і можуть бути визначені лише для деяких моментів перемикання. У зв'язку з цим, можливість відшукання розв'язку задачі на оптимум витрат палива залежить від порядку рівняння динаміки системи керування.

Таким чином, якщо перші два фактори і створюють певні труднощі при аналітичному розв'язанні даної оптимізаційної задачі, то останнє зауваження є принциповим, що обмежує клас систем, для яких аналітично може бути отримане оптимальне за мінімумом витрат палива програмне керування.

Використовуючи вказану методику, отримаємо аналітичні залежності моментів перемикання оптимального керування від вигляду критеріїв витрати палива та межових умов для одного із найпростіших класів динамічних систем із транспортним запізнюванням – систем керування другого порядку.

Оптимальне програмне керування системою із двох інтегруючих ланок

Рівняння динаміки системи керування, структура якої відповідає двом інтегруючим ланкам, мають вигляд:

$$\begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t-\tau); \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = u\,(t)\,; \quad (0 \leq t \leq t_k)\,, \end{array} \tag{1}$$

де: $x_1\,(t)$, $x_2\,(t)$ – змінні стану системи керування;
$\tau = \mathrm{const} > 0$ – чисте часове (транспортне) запізнювання;
$u\,(t)$ – керування, яке обмежене за величиною умовою

$$|u(t)| \leq 1, \quad (0 \leq t \leq t_k)\,, \tag{2}$$

t_k – кінцевий момент часового інтервалу керування;

$x_1(0) = x_1^0,\ x_2(0) = x_2^0;\quad x_1(t_k) = x_2(t_k) = 0$ початкові і кінцеві умови. (3)

Для однозначного визначення руху системи на відрізку часу $t \in [0, t_k]$ необхідно задати допустиме керування $u(t)$, $(0 \leq t \leq T)$ та початкову неперервну функцію $\varphi(t)$, яка визначена на відрізку $-\tau \leq t \leq 0$.

В результаті вектор-функція $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}$, яка задана на відрізку $-\tau \leq t \leq t_k$ і всюди неперервна на ньому, називається траєкторією системи (1), що відповідає допустимому керуванню $u(t)$ і заданій початковій функції $\varphi(t)(-\tau \leq t \leq 0)$, якщо функція $\mathbf{x}(t)$ на відрізку $0 \leq t \leq t_k$ задовольняє рівняння (1), а на відрізку $-\tau \leq t \leq 0$ збігається із функцією $\varphi(t)$.

Якщо крім забезпечення заданих межових умов (3) додатково вимагається, щоб у системі за $t \geq t_k$ забезпечувався заданий усталений рух вигляду

$$x_1(t) = x_2(t) = 0, \tag{4}$$

то із-за наявного у системі чистого часового запізнювання цей режим досягається лише за умови

$$x_2(t) \equiv 0\ ,\ t_k - \tau \leq t \leq t_k. \tag{5}$$

Послідовно використовуючи принцип максимуму і метод фазового простору [1,2] вирішуємо дві задачі на оптимум витрат палива, перша з яких є так звана задача із *компромісним критерієм*, що враховує швидкодію керування і витрати палива при нефіксованій тривалості

 ISSN 1562-9945

перехідного процесу системи, а друга – тільки *чисту витрату палива* при заданій тривалості процесу керування.

Спочатку розглянемо першу оптимізаційну задачу.

Задача 1. Треба знайти оптимальне керування $u(t)$, яке переводить систему із заданого початкового стану $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 = \{x_1^0, x_2^0\}$ при початковій функції $\varphi(t) \triangleq x_2(t)(-\tau \le t \le 0)$ у кінцевий, нульовий стан $\mathbf{x}(t_k) = \{x_1(t_k), x_2(t_k)\} = 0$ і забезпечує при цьому мінімум функціоналу

$$J_1(u(t)) = \int\limits_0^{t_k} (k + |u(t)|)dt, \tag{6}$$

де: $k > 0$ – ваговий коефіцієнт, що враховує тривалість перехідного процесу у системі;
t_k – заздалегідь не задано (не зафіксоване).

Згідно з принципом максимуму [2] гамільтоніан системи (1) для функціоналу (6) запишеться так:

$$H[\mathbf{x}(t), u(t), \bar{\psi}(t)] = k + |u(t)| + \psi_1(t)x_2(t-\tau) + \psi_2(t)u(t). \tag{7}$$

Допоміжні змінні $\psi_1(t), \psi_2(t)$ є розв’язок канонічних рівнянь, що мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} &\dot{\psi}_1(t) = 0, \quad (0 \le t \le t_k); \\ &\dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t+\tau), \quad (0 \le t \le t_k - \tau); \\ &\dot{\psi}_2(t) = 0, \quad (t_k - \tau \le t \le t_k), \end{aligned} \tag{8}$$

з яких маємо:

$$\begin{aligned} &\psi_1(t) = \psi_1^0 = \mathrm{const},\ (0 \le t \le t_k); \\ &\psi_2(t) = -\psi_1^0 t + \psi_2^0,\ (0 \le t \le t_k - \tau); \\ &\psi_2(t) = -\psi_1^0(t_k - \tau) + \psi_2^0 = \mathrm{const},\ (t_k - \tau \le t \le t_k), \end{aligned} \tag{9}$$

де ψ_1^0, ψ_2^0 – початкові умови для системи рівнянь (8).

Оптимальне керування $u^*(t)$, яке доставляє максимум гамільтоніану (7), визначається як

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |\psi_2(t)| < 1; \\ -\mathrm{sign}\psi_2(t), & \text{якщо } |\psi_2(t)| > 1. \end{cases} \tag{10}$$

за умови, що із розгляду виключаються вироджені керування вигляду

$$\begin{aligned} 0 \le u(t) \le 1, &\quad \text{якщо } \psi_2(t) = -1; \\ -1 \le u(t) \le 0, &\quad \text{якщо } \psi_2(t) = 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Графіки зміни значень функцій $\psi_2(t), u(t), \dot{x}_1(t), x_2(t)$ подано на рис. 1.

Співвідношення (10) визначають наступні оптимальні керуючі послідовності $\{0\}$, $\{+1\}$, $\{-1\}$, $\{0,+1\}$, $\{0,-1\}$, $\{-1,0\}$, $\{+1,0\}$, $\{-1,0,+1\}$, $\{+1,0,-1\}$, із яких, своєю чергою відповідно до заданого кінцевого руху системи (1) можуть бути вилучені такі керуючі послідовності, як: $\{0\}$,

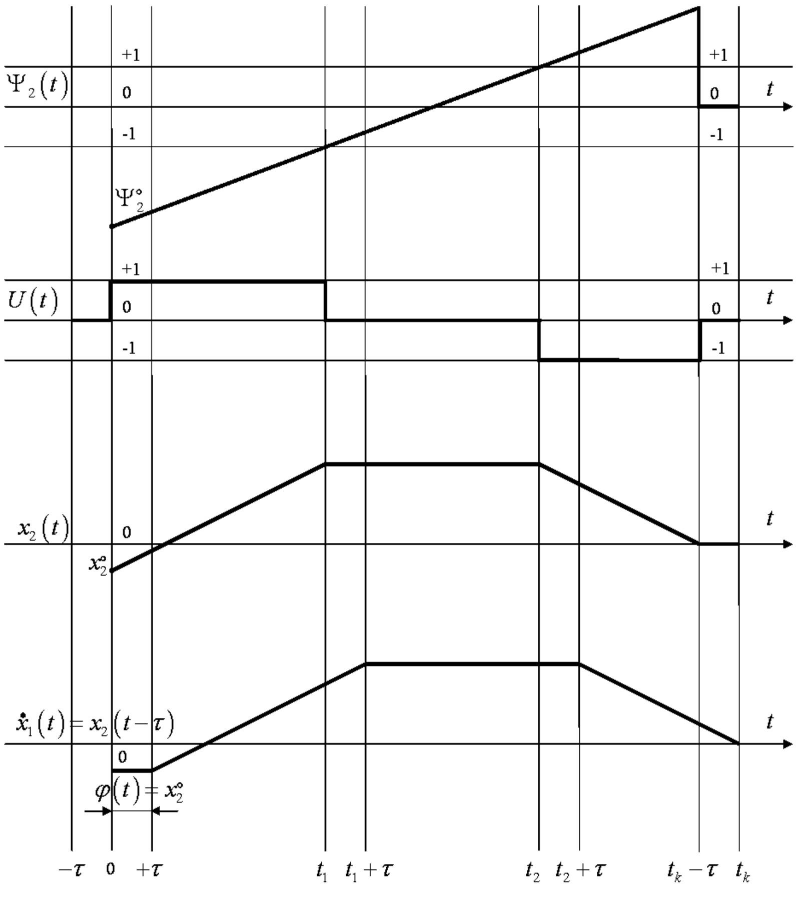

Рис. 1 – Графіки зміни значень функцій

ISSN 1562-9945

$\{+1, 0\}, \{-1, 0\}$. Вибираючи за базові оптимальні керуючі послідовності загального виду $\{-u_0, 0, u_0\}$, де $u_0 = \pm 1$, знаходимо у результаті інтегрування системи рівнянь (1) за межових умов (3) і “зшиваючи” фазові траєкторії із різних ділянок руху системи, отримаємо такі співвідношення між шуканими моментами перемикання оптимального керуючого впливу $u^*(t)$:

$$\begin{array}{l} t_3 - (t_2 + t_1 + \tau) = -u_0 x_2^0; \\ t_3^2 - (t_2 + \tau)^2 - (t_1 + \tau)^2 = 2u_0 \tilde{x}_1^0 - 2u_0 x_2^0 \tau - \tau^2, \end{array} \qquad (12)$$

де: t_1, t_2, t_3 – відповідно перший, другий і третій моменти перемикання оптимального керування $u^*(t)$;

$\tilde{x}_1^0 = x_1^0 + \int\limits_0^\tau \varphi(t)dt$ – зміщена початкова умова завдяки ефекту запізнювання на початку першого інтервала руху системи.

Очевидо, що отримана система рівнянь не розв’язується відносно шуканих величин t_1, t_2, t_3, тому з метою отримання додаткового лінійно незалежного співвідношення між моментами t_i $(i = 1, 2, 3)$ використовується умова стаціонарності гамільтоніана $H[\mathbf{x}(t), u(t), \bar{\psi}(t)]$ уздовж оптимальної траєкторії руху $\mathbf{x}^*(t)$, а саме у момент часу $t = t_2$.

$$H[\mathbf{x}^*(t), \mathbf{x}^*(t-\tau), \bar{\psi}^*(t), u^*(t)]|_{t=t_2} = 0. \qquad (13)$$

Звідси, з урахуванням того, що $u^*(t_2) = 0$, отримуємо

$$H|_{t=t_2} = k + x_2(t_2 - \tau)\psi_1^0 = 0 \qquad (14)$$

і знаходимо

$$\psi_1^0 = \frac{k}{x_2(t_2 - \tau)}. \qquad (15)$$

Використовуючи раніше отримані вирази (9) для допоміжних функцій $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, зв’язуємо невідому початкову умову ψ_1^0 з моментами часу t_1, t_2 таким чином. Маємо

$$\psi_2(t_1) = -\psi_1^0 t_1 + \psi_2^0 = u_0; \qquad (16)$$

$$\psi_2(t_2) = -\psi_1^0 t_2 + \psi_2^0 = -u_0 \qquad (17)$$

і віднімаємо (16) із (17), отримуючи

$$t_2 - t_1 = \frac{2u_0}{\psi_1^0} \qquad (18)$$

і після підстановки (15) у (18) маємо

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{k}[2u_0 x_2(t - \tau)]. \qquad (19)$$

Якщо тепер скористатися розв’язком системи диференціальних рівнянь (1) для координати $x_2(t - \tau)$, то маючи вираз

$$x_2(t_2-\tau)=x_2(t_1)=x_2^0-u_0t_1, \tag{20}$$

із (19) отримуємо шукане додаткове співвідношення між моментами t_2 і t_1

$$t_2=\frac{k+2}{k}t_1-\frac{2u_0x_2^0}{k}. \tag{21}$$

Розв’язуючи тепер вже сумісну систему рівнянь (12) і (21), знаходимо явні аналітичні вирази для моментів перемикання $t_j,\ \ j=1,2,3$ оптимального керування $u^*(t)$:

$$t_1=u_0x_2^0\pm\sqrt{\frac{k}{k+2}\left(\frac{(x_2^0)^2}{2}+u_0\tilde{x}_1^0\right)}, \tag{22}$$

$$t_2=u_0x_2^0\pm\sqrt{\frac{k+2}{k}\left(\frac{(x_2^0)^2}{2}+u_0\tilde{x}_1^0\right)}, \tag{23}$$

$$t_3=t_к=u_0x_2^0\pm2(k+1)\sqrt{\frac{1}{k(k+2)}\left(\frac{(x_2^0)^2}{2}+u_0\tilde{x}_1^0\right)}+\tau. \tag{24}$$

Вочевидь, співвідношення (22),(23) і (24) справджуються лише за умови, що $t_j\ \geq\ 0,\ \ j\ =\ 1,2,3$ і $t_2-t_1\ \geq\ \tau$. Якщо значення величини t_1 є від’ємне, це свідчить про відсутність першого інтервалу в оптимальній послідовності $\{-u_0,0,u_0\}$, яка приймає такий скорочений вигляд: $\{0,u_0\}$, де $u_0=\pm1$. Система алгебраїчних рівнянь відносно t_2,t_3 набуває вигляду

$$\begin{array}{l} t_3-(t_2+\tau)=-u_0x_2^0,\\ t_3^2-(t_2+\tau)^2=2u_0\tilde{x}_1^0-2u_0x_2^0\tau, \end{array} \tag{25}$$

розв’язком якої буде

$$\left.\begin{array}{l} t_2=\frac{u_0x_2^0}{2}-\frac{\tilde{x}_1^0}{x_2^0}\\ t_3=t_k=-\frac{u_0x_2^0}{2}-\frac{\tilde{x}_1^0}{x_2^0}+\tau. \end{array}\right\} \tag{26}$$

Оскільки до кожного із виразів (22), (23), (24) і (26) для визначення моментів перемикання входить значення оптимального керування $u_0=\pm1$ на першому, початковому інтервалі руху, то від правильного його вибору у значній мірі залежить вирішення поставленої задачі. Відомо, [1,6,7], що початкове керування u_0 залежить від межових умов $\mathrm{x}(0)=\mathrm{x}^0$ і $\mathrm{x}(t_k)$, але оскільки у даному випадку $\mathrm{x}(t_k)=0$, то досить визначити u_0 тільки як функцію x^0, а саме

$$u_0=\begin{cases}\text{sign }\ x_1^0, \textbf{якщо } x_1^0\neq0,\\ \text{sign }\ x_2^0, \textbf{якщо } x_1^0=0.\end{cases} \tag{27}$$

Зауважимо, що якщо обидва значення для моменту t_1 згідно (22) є додатні, то як шукане слід вибирати більше з цих значень.

Тепер розглянемо вирішення другої задачі:

 ISSN 1562-9945

Задача 2. Для системи вигляду (1) треба знайти оптимальне керування $u^*(t)$, яке переводить її із початкового стану $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ у кінцевий нульовий стан $\mathbf{x}(t_k) = 0$ за умови, що $x_2(t) = \varphi(t)(-\tau \leq t \leq 0)$, а функціонал якості процесу керування

$$J_2(u(t)) = \int\limits_0^{t_k} |u(t)|dt \tag{28}$$

досягав свого мінімального значення. Тут величина t_k зазделегідь фіксована. Як і раніше, зберігаються умови (4) і (5) усталеного руху системи по завершенню перехідного процесу, які доповнюються умовою існування розв'язку даної задачі оптимального керування.

$$t_k \geq t_k^*, \tag{29}$$

де t_k^* – тривалість оптимального за швидкодією процесу керування для системи (1).

Використавши спочатку методику вирішення задач оптимальної швидкодії [6], знайдемо величину t_k^*, що визначає згідно з (29) існування розв'язку оптимізаційної задачі 2. Ця величина дорівнює

$$t_k^* = \tau + u_0 x_2^0 \pm \sqrt{(x_2^0)^2/2 + u_0 \tilde{x}_1^0}, \tag{30}$$

де $\tilde{x}_1^0 = x_1^0 + \int\limits_0^{\tau} \varphi(t)dt$ – зміщена завдяки початковій функції $\varphi(t)$ межова умова для координати $x_1(t)$, а допустимі значення для t_k^* будуть тільки додатні.

В силу подібності процесів оптимального керування і рівного числа моментів перемикання для обох оптимізаційних задач для синтезу оптимальних програмних керувань при фіксованому t_k досить у виразах (12) і (25) покласти третій кінцевий момент перемикання $t_3 = t_k$

У підсумку з (12) при трьох інтерввалах оптимального керування $\{-u_0, 0, u_0\}$, де $u_0 = \pm 1$, маємо:

$$t_1 = \frac{1}{2}\left[u_0 x_2^0 + t_k - \tau\right] - \frac{1}{2}\sqrt{(t_k + u_0 x_2^0 - \tau)^2 - 2(x_2^0)^2 - 4u_0 \tilde{x}_1^0} \tag{31}$$

$$t_2 = \frac{1}{2}\left[u_0 x_2^0 + t_k - \tau\right] + \frac{1}{2}\sqrt{(t_k + u_0 x_2^0 - \tau)^2 - 2(x_2^0)^2 - 4u_0 \tilde{x}_1^0} \tag{32}$$

За наявності лише двох інтервалів оптимального керування $\{0, u_0\}$, коли вважається, що $t_1 = 0$, використовується тільки співвідношення (25), яке дає такі величини:

$$\begin{aligned} t_2 &= t_k - \tau + u_0 x_2^0, \\ T_k &= -\tfrac{\tilde{x}_1^0}{x_2^0} + \tau - \tfrac{u_0 x_2^0}{2}, \end{aligned} \tag{33}$$

де T_k – тривалість оптимального за витратами палива двохінтервального процесу при початкових умовах (координатах) $\tilde{x}_1^0, x_2^0$ для критерія вигляду (28). Якщо $T_k > t_k$, то розв’язку оптимізаційної задачі 2 не існує, а якщо $T_k < t_k$, то треба використовувати для керування трьохінтервальну послідовність $\{-u_0, 0, u_0\}$. І тільки за умови $T_k = t_k$ має місце відповідність початкових умов $\tilde{x}_1^0, x_2^0$ величині фіксованої тривалості t_k оптимального за витратами палива перехідного процессу в системі (1).

Таким чином, на прикладі найпростішої системи другого порядку з транспортним запізнюванням вигляду (1) було показано, що програмне оптимальне за витратами оптимального керування залежить що від вигляду критерія оптимізації, так і від початкової функції $\varphi(t)(-\tau \le t \le 0)$ і межових умов.

Література

1. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление.— М.: Машиностроение, 1984.—764 с.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. В. Математическая теория оптимальных процессов.— М.: Наука, 1969.—364 с.
3. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование.—М.: Наука, 1975.—270 с.
4. Игнатенко В. Н., Стенин А. А. О числе переключений в оптимальных по расходу топлива системах управления.// Адаптивные системы автоматического управления. Республиканский межведомственный сборник.—К.: Техніка, 1983, с.42—46.
5. Павлов А. А. Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. М.: Наука, 1966.—250 с.
6. Олейников С. А., Зотов В. Г. Основы оптимального и экстремального управления.—Л.: Высшая школа.– 220 с.
7. Игнатенко В. Н., Стенин А. А., Сиз В. В. Оптимальное по расходу топлива управление системами второго порядка с запаздыванием. //Вестник КПИ, серия автоматики и электро-приборостроения.—К.: Техніка, 1973, с. 119—126.
8. Стенин А. А. Оптимальное по расходу топлива управление системами второго порядка с последействием при фиксированном времени перехода.// Вестник КПИ, серия технической кибернетики, 1.—К.: Техніка, 1977, с.11—13.
9. Антамонов Ю. Г. Автоматическое управление с применением вычислительных машин.—М.: Судпромгиз, 1962, с. 212.
10. Лернер А. Я. Принципы построения быстродействующих систем и регуляторов.—М.: Госэнергоиздат, 1961. с.250.

 ISSN 1562-9945