УДК 621.924.229.86

А.Г. Кику, В.М. Бурлаков, Г.Ю. Павловский

СИНТЕЗ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И КОРНЕВЫХ КРИТЕРИЕВ КАЧЕСТВА

Введение

Статья посвящена разработке подхода синтеза классических регуляторов с обратной связью на основе интегральных и корневых критериев качества, позволяющего учитывать как быстродействие, перерегулирование и колебательность управляемого процесса, так и расход энергии на управление. При этом интегральный квадратичный критерий общего вида используется для решения задачи выбора структуры регулятора и его параметрической настройки, а корневой критерий – для учета таких показателей качества, как быстродействие, перерегулирование, колебательность. Содержание статьи направлено, в основном, на обоснование предложенного подхода, а не на его исчерпывающее решение.

Анализ существующих методов решения задач синтеза классических регуляторов

Как правило, задачи синтеза классических регуляторов, сводятся к синтезу так называемых корректирующих устройств. В таких задачах “основная часть” математической модели, учитывающая модель объекта управления и функционально необходимых элементов систем управления, включая их конфигурацию и принцип управления, считаются известными. Для решения подобных задач используются известные частотные, корневые и интегральные методы. Выбор метода осуществляется с учетом набора содержательных требований к качеству процесса управления.

Среди названных методов наиболее мощным является частотный метод, реализованный на базе логарифмических амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик. Этот метод позволяет одновременно обеспечить требования точности вынужденных режимов процесса управления, его быстродействие и перерегулирование. Метод позволяет определить как структуру, так и параметры корректирующих устройств.

Корневой метод позволяет обеспечивать требования быстродействия и колебательности свободных составляющих процесса управления. В этом методе, как правило, структура корректирующего устройства выбирается эвристически на базе некоторых соображений, а ее параметры подлежат определению. Такой подход известен, как подход синтеза “модального” управления.

Классические интегральные методы, оперирующие в основном квадратичными формами от переменных состояния, позволяют обеспечить

 ISSN 1562-9945

интегральные требования к свободной составляющей процесса управления и ее производных. В этом методе структура корректирующего устройства также выбирается на базе некоторых соображений, а ее параметры находятся из условия минимума используемого критерия. Конструктивность интегральных квадратичных критериев связана в основном со сравнительно простотой процедуры решения задачи оптимизации.

Следует отметить, что все классические методы в чистом виде не учитывают такой важный показатель качества, как расход энергии на управление.

Попытку решить задачу синтеза классических регуляторов, учитывающие расход энергии на управление, выполнил В.К.Антонов в ряде его работ, включая подготовленную диссертацию на соискание степени доктора технических наук. Для достижения указанной цели В.К.Антонов, как базовую, использовал следующую интегрально-квадратическую постановку задачи

$$\frac{\min}{x,u}\left\{\int_0^\infty [x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)]dt \;\middle|\; \begin{array}{ll} \dot{x}=\varphi_i[(x(t),u(t)], & i=1\dots n; \\ x_i(0)=x_{i0}, & i=1\dots n; \\ x_i(\infty)=0, & i=1\dots n \end{array}\right\} \quad (1)$$

Известно, что полученный алгоритм управления с обратной связью, имеет вид

$$u^*=u^*(x^*)=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i^*=k^Tx^* \quad (2)$$

Содержательные показатели качества, такие как быстродействие t_y, перерегулирование $\sigma_{\max}$ и расход энергии $Э_u$ зависят от коэффициентов k_i алгоритма управления, т.е.:

$$t_y=t_y(k),\sigma_{\max}=\sigma_{\max}(k),\ Э_u=Э_u(k), \quad (3)$$

или от переменных состояния:

$$t_y=t_y(x),\sigma_{\max}=\sigma_{\max}(x),\ Э_u=Э_u(x). \quad (4)$$

Из последнего следует, что для управления указанными показателями качества необходимо управлять всем вектором переменных состояния.

Для управления вектором переменных состояния В.К. Антонов предложил в критерий качества ввести дополнительную взвешенную квадратичную форму $\gamma x^T(t)Q_Д x(t)$, т.е. от задачи (1) перейти задаче

$$\frac{\min}{x,u}\left\{\int_0^\infty [x^T(t)Qx(t)+\gamma x^T(t)Q_Д x(t)+u^T(t)Ru(t)]dt \;\middle|\; \begin{array}{l} \dot{x}=\varphi_i[(x(t),u(t))]; \\ x_i(0)=x_{i0}; \\ x_i(\infty)=0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

$$i=1\dots n$$

в которой в качестве весового коэффициента γ он в частности использовал скалярную постоянную. При этом утверждал, что одной постоянной γ может управлять полным вектором переменных состояния. Очевидно, что скалярным “инструментом” γ нельзя управлять векторной переменной. Это заблуждение и привело к провалу защиты его докторской диссертации.

Цель данной статьи состоит в демонстрации возможного подхода решения задач подобного рода.

Постановка задачи

Решаемая в рамках статьи задача состоит в следующем:

1. На основе интегральных квадратичных критериев качества разработать корректный подход синтеза корректирующих устройств, учитывающих кроме требованиийй к быстродействию и перерегулированию процесса управления, также и требование к расходу энергии на управление.
2. Показать, что при необходимости, могут быть решены и обратные задачи, а именно, могут быть синтезированы интегральные критерии качества на основе требований к содержательным показателям качества.

Подход решения задачи

Демонстрации возможного подхода синтеза корректирующих устройств, обеспечивающих упомянутые требования, рассмотрим на основе следующей постановке задачи управления состоянием линейного объекта второго порядка

$$\frac{\min}{x,u}\left\{\int_0^\infty (q_1x_1^2+q_2x_2^2+q_3u^2)dt\;\middle|\;\begin{array}{l}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-a_0x_1-a_1x_2+u,\\ x_1(0)=x_{10},x_2(0)=x_{20};\\ x_1\infty=0,x_2\infty=0;\\ t_y\le t_{удов},\sigma_{\max}\le\sigma_{\max\,доп},\\ \int\limits_0^\infty u^2(t)dt\le Э_{идоп}\end{array}\right\} \qquad (6)$$

где a_0, a_1, b – коэффициенты дифференциального уравнения объекта управления

$$\ddot{x}+a_1\dot{x}+a_0x=bu. \qquad (7)$$

Рассмотрим сперва решение задачи (6) без учета ограничений $t_y \le t_{удоп}, \sigma_{\max} \le \sigma_{\max\,доп}, \int\limits_0^\infty u^2(t)dt \le Э_{идоп}$.

При желании привлечь корневой метод для обеспечения показателей качества $t_y \le t_{удоп}, \sigma_{\max} \le \sigma_{\max\,доп}$ задачу целесообразно решить методом классического вариационного исчисления. Функционал Лагранжа для такой задачи имеет вид

$$L=\int\limits_0^\infty q_1x_1^2+q_2x_2^2+q_3u^2+\phi_1(\dot{x}_1-x_2)+\phi_2(\dot{x}_2+a_0x_1+a_1x_2-bu)dt. \qquad (8)$$

Найденное из (8) оптимальное управление равно

$$u^*=\frac{b}{2q_3}\phi_2, \qquad (9)$$

а система дифференциальных уравнений для переменных x_1, x_2, ϕ_1, ϕ_2 с учетом (9) принимает вид

$$\begin{array}{l}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-a_0x_1-a_1x_2+\frac{b^2}{2q_3}\phi_2\\ \dot{\phi}_1=2q_1x_1+a_0\phi_2\\ \dot{\phi}_2=2q_2x_2-\phi_1+a_1\phi_2\end{array} \qquad (10)$$

Характеристическое уравнение системы (10) имеет вид

$$\lambda^4+2(a_0-\frac{a_1^2}{2}-\frac{q_2b^2}{2q_3})\lambda^2+a_0^2+\frac{b^2q_2}{q_2}=\lambda^4+2\beta_1\lambda^2+\beta_2=0 \qquad (11)$$

В дальнейшем ограничимся лишь случаем действительных корней, (11) который соответствует условию

$$\beta_1^2>\beta_2,\ \beta_1<0. \qquad (12)$$

При этом корни λ_i равны

$$\lambda_{1,2}=\sqrt{-\beta_1\pm\sqrt{\beta_1^2-\beta_2}}; \lambda_3=-\lambda_1, \lambda_4=-\lambda_4 \qquad (13)$$

С учетом граничных условий оптимальные переменные состояния и оптимальное программное управление принимают вид

$$\begin{array}{c}x_1^*(t)=x^*(t)=C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}=\frac{\lambda_2x_{10}-x_{20}}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_1t}+\frac{x_{20}-\lambda_1x_{10}}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2t}=\\ =x_1^*(t,\lambda_1,\lambda_2)=x_1^*(t,q_1,q_2,q_3)\end{array} \qquad (14)$$

$$x_2(t)=\dot{x}(t)=\lambda_1C_1e^{\lambda_1t}+\lambda_2C_2e^{\lambda_2t}=x_2^*(t,\lambda_1,\lambda_2)=x_2^*(t,q_1,q_2,q_3) \qquad (15)$$

$$\begin{array}{c}u^*(t)=\frac{1}{b}[(a_0+a_0\lambda_1+\lambda_1^2)C_1e^{\lambda_1t}+(a_0+a_0\lambda_2+\lambda_2^2)C_2e^{\lambda_2t}]=\\ =u^*(t,\lambda_1,\lambda_2)=u^*(t,q_1,q_2,q_3)\end{array} \qquad (16)$$

Алгоритм оптимального управления с обратной связью имеет вид

$$u^*(x_1^*,x_2^*)=k_1x_1^*+k_2x_2^*=\frac{a_0-\lambda_1\lambda_2}{b}x_1^*+\frac{a_0+\lambda_1+\lambda_2}{b}x_2^* \qquad (17)$$

Таким образом, переменные состояния и управление, по которым можно судить о быстродействии и перерегулировании, которые зависят от корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения (11), также зависят от параметров q_1, q_2, q_3 интегрального критерия качества. От этих же параметров зависит сам критерий качества

$$I = \int_0^\infty (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + q_3 u^2) dt = I(\lambda_1, \lambda_2) = I(t, q_1, q_2, q_3) \qquad (18)$$

и его интегральные составляющие

$$I_1 = \int_0^\infty x_1^2 dt = I_1(\lambda_1, \lambda_2) = I_1(t, q_1, q_2, q_3), \qquad (19)$$

$$I_2 = \int_0^\infty x_2^2 dt = I_1(\lambda_1, \lambda_2) = I_2(t, q_1, q_2, q_3), \qquad (20)$$

$$I_u = \int_0^\infty u^2 dt = I_u(\lambda_1, \lambda_2) = I_u(t, q_1, q_2, q_3), \qquad (21)$$

характеризующие требования интегральной точности и расход энергии на управление. На рисунках для случая $a_1 = 1, a_0 = 2, b = 4$, $q_1 = 3, q_2 = 2, q_3 = 1$, $x_{10} = 10, x_{20} = 0$ и двух различных вариантов *а*: $(\lambda_{1a} = -36, \lambda_{2a} = -25)$, *в*: $(\lambda_{1B} = -36, \lambda_{2B} = -64)$ приведены графики упомянутых зависимостей

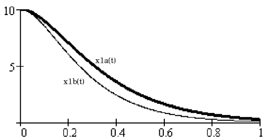

Рис. 1 – График переменной x1

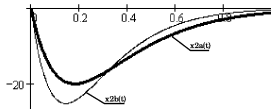

Рис. 2 – График переменной x2

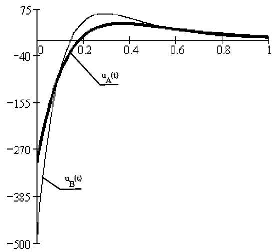

Рис. 3 – График переменной x3

Из сказанного следует, что параметры интегрального критерия качества в свою очередь зависят от корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения дифференциального уравнения объекта. Для рассмотренного случая эти зависимости имеют вид (Рис. 8, Рис. 9):

$$q_1(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1^2 \lambda_1^2 - a_0}{b^2}, \; q_2(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_1^2 + 2a_0 - a_1^2}{b^2} \qquad (22)$$

 ISSN 1562-9945

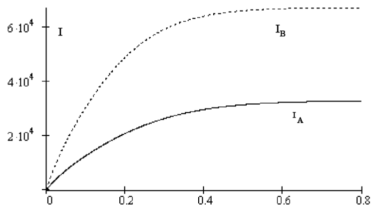

Рис. 4 – График критерия качества

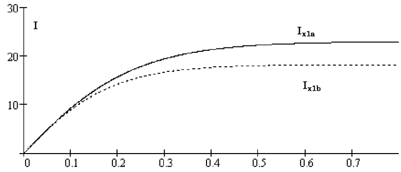

Рис. 5 – График составляющей Ix1

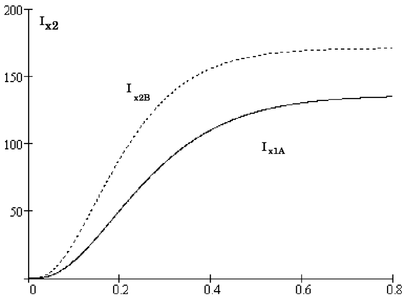

Рис. 6 – График составляющей Ix2

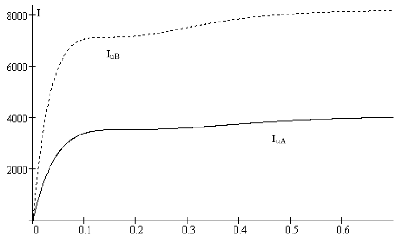

Рис. 7 – График составляющей Iu

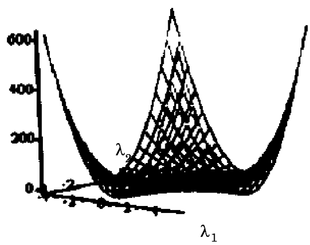

Рис. 8 – Зависимость $q_1(\lambda_1, \lambda_2)$

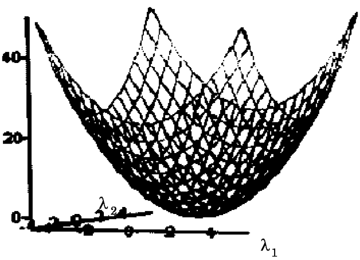

Рис. 9 – Зависимость $q_2(\lambda_1, \lambda_2)$

Коэффициенты алгоритма (17) оптимального управления также зависят от корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения системы (10) (Рис. 10,Рис. 11):

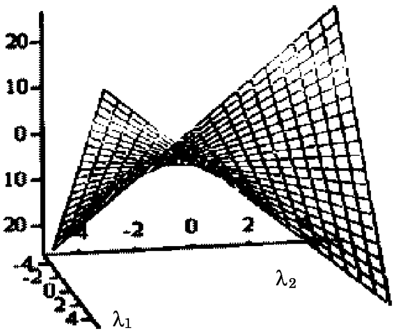

Рис. 10 – Зависимость $k_1(\lambda_1, \lambda_2)$

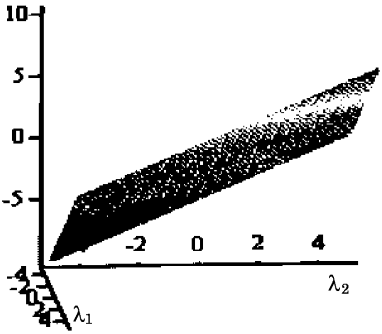

Рис. 11 – Зависимость $k_2(\lambda_1, \lambda_2)$

Из сказанного вытекает, что на основе указанных зависимостей

1. по желаемым временем управления и перерегулированию, которые задаются соответствующим расположением корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения, на основе (22) могут быть найдены требуемые коэффициенты интегрального критерия качества для их удовлетворения;
2. по допустимому расходу энергии на управление могут быть найдены необходимые корни характеристического уравнения (Рис. 12);
3. по требуемым составляющим частей I_1, I_2 критерия качества, могут быть найдены необходимые корни характеристического уравнения (Рис. 13);

4. по желаемому расположению корней характеристического уравнения могут быть найдены коэффициенты усиления алгоритма управления (17) и др.

Соответствующие зависимости могут быть получены для объектов более высокого порядка.

На основе полученных зависимостей может быть найдено оптимальное компромиссное решение с точки зрения удовлетворения всех показателей качества, включая расход энергии на управление. Если последнее окажется неприемлемым с прикладной точки зрения, то это означает, что в рамках выбранной структуры корректирующего устройства требуемое решение не может быть достигнуто. Отсюда следует, что для получения удовлетворительного решения необходимо ввести структурные изменения корректирующего устройства и повторить процедуру его параметрического синтеза. Подобный вывод не является оригинальным,

 ISSN 1562-9945

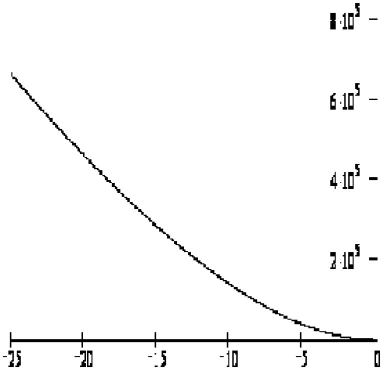

Рис. 12 – Зависимость $I_u(\lambda_2)$

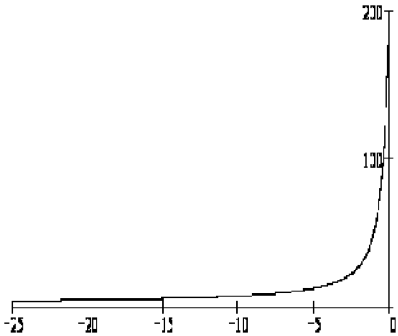

Рис. 13 – Зависимость $I_{x1}(\lambda_2)$

так как с аналогичными трудностями, как правило, встречаемся при решении задач оптимального управления на основе косвенных критериев качества и особенно интегральных критериев. Действительно, коэффициенты матриц Qи R в (5) определяются итерационным способом.

Литература

1. Антонов В.К. Метод построения качественных регуляторов // Кибернетика и вычислительная техника, вып.126, 2000.- С.40-48.
2. Антонов В.К. Конструирование регуляторов с заданным качеством // Вестник КМУЦА, 1, 1999. С.95-100.