УДК 621.924.229.86

А.Г. Кику, В.М. Бурлаков

ТРАНСФОРМАЦИЯ МЕТОДА КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С РАЗРЫВНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Введение

Статья посвящена модификации метода классического вариационного исчисления для решения задач с разрывным управлением с целью доведения его мощности прикладной применимости до мощности принципа максимума. Конкретно доказано, что когда принцип максимума применим, то может быть выведен на основе метода классического вариационного исчисления путем соответствующего “наращивания” последнего. Параллельно показано, что принцип максимума в таком виде, в каком существует, может быть обоснован значительно проще на основе конечной по амплитуде вариации управления в бесконечномалом интервале времени, имеющей место в точках разрыва управления.

Анализ существующих методов решения задач с разрывными управлениями

Для решения подобных задач в настоящее время существует единственный метод, а именно метод принципа максимума, доказательство которого осуществлено на основе понятия игольчатой вариации. Однако в процессе доказательства его авторы предполагают, что игольчатые вариации приводят к бесконечно малым нормам возмущений переменных состояния и критерия оптимальности. Последнее же не всегда имеет место, а именно, игольчатые вариации применительно к объектам, содержащим операции дифференцирования в правых частях их дифференциальных уравнений, могут привести к конечным разрывам норм переменных состояния. Так, для объектов, описываемых дифференциальными уравнениями вида:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} p^i y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_{n-i} p^i u(t), m \neq 0, p = d/dt, p^i y_{-0}, i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad (1)$$

где $u(t), y(t)$ – вход и выход объекта, $p^i y_{-0}$ – начальные условия, скачкообразные возмущения управления $u(t) = 1(t - t_0)$ приводит следующему скачкообразному возмущению производных [1]:

 ISSN 1562-9945

$$y(t_0+0)=y(t_0),\ldots,p^{n-m-1}y(t_0)=p^{n-m-1}y(t_0),$$
$$p^{n-m}y(t_0+0)=p^{n-m}y(t_0)+b_0,$$
$$p^{n-m+1}y(t_0+0)=p^{n-m+1}y(t_0)+b_1-a_1[p^{n-m}y(t_0+0)-p^{n-m}y(t_0)], \qquad (2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$p^{n-1}y(t_0+0)=p^{n-1}y(t_0)+b_{m-1}-a_{m-1}[p^{n-m}y(t_0+0)-p^{n-m}y(t_0)]-$$
$$-\ldots a_1p^{n-m}y(t_0+0)-p^{n-m}y(t_0)[p^{n-2}y(t_0+0)-p^{n-2}y(t_0)].$$

В таких случаях в точках разрыва управлений система сопряженных уравнений не существует, а это означает, что для таких объектов принцип максимума неприменим.

Постановка задачи

Решаемая в рамках данной статьи задача состоит в усовершенствовании метода классического вариационного исчисления, позволяющем решить так называемую общую задачу управления Понтрягина

$$[x^*,u^*,t_1^*,t_2^*]^T=\arg\left\{\frac{\min}{x,u,t_1,t_2}\left\{\int\limits_{t_1}^{t_2}f_0(x,u,t)dt+l_0[x(t_1),x(t_2)]\right.\right.$$
$$\left|\dot{x}_i=\varphi_i(x,u,t),i=\overline{1,n},(a)\ g_i=0,i=\overline{m_1+1,m},\ (b)\right. \qquad (3)$$
$$g_i\le 0,i=\overline{1,m_1},(c)\ u\in U^{KH}(d)$$

где x,u – соответственно вектор переменных состояния и управления, (a) – модель объекта управления, (b) – неклассические ограничения, (c) – классические ограничения, U^{KH} – множество допустимых кусочно-непрерывных управлений, допускающих ограниченное число разрывов первого рода, а g_i имеют такую же структуру, как и критерий оптимальности, т.е. равны $g_i=\int\limits_{t_1}^{t_2}f_i(x,u,t)dt+l_i[x(t_1),x(t_2)],i=\overline{1,m}$.

Рассмотрим случай объектов

$$\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}p^iy(t)=\sum_{j=0}^{m}b_{n-i}p^iu(t),m=0,p=d/dt,p^iy_{-0},i=0,1,\ldots,n-1, \qquad (4)$$

для управления которых принцип максимума применим. Пусть в интервале времени $[\tau,\tau+\varepsilon]$ на управление наложена игольчатая вариация $v(\tau)$, удовлетворяющая условию $u(t)+v(\tau)\in U^{KH}$. Тогда

$$x(t)=\phi(t-t_o)x(t_o^)+\int\limits_{t_o}^{t}\phi(t-\lambda)G(\lambda)u(\lambda)d\lambda+\int\limits_{t_o}^{t_o+\varepsilon}\phi(t-\lambda)G(\lambda)v(\lambda)d\lambda \qquad (5)$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon\to 0$ норма вектора $\|\delta x\|=|\delta x|$ возмущения переменных состояния

$$\frac{\lim}{\varepsilon\to 0}\|\delta x(t)\|=\frac{\lim}{\varepsilon\to 0}\|\phi(t-\lambda)G(\lambda)v(\lambda)\|\,\varepsilon\to 0 \qquad (6)$$

представляет собой вектор бесконечно малых величин $[\|\delta x_1\| \dots \|\delta x_n\|]^T$.

В свою очередь нормы возмущений критерия Лагранжа

$$L[x, u, t_1, t_2, \lambda, \phi(t)] = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j-0}^{m} \lambda_j f_j(x, u, t) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j(t)[\dot{x} - \varphi_j(x, u, t)] \right\} dt + \\ + \sum_{j=0}^{m} \lambda_j l[x(t_1), x(t_2), t_1, t_2]\} \tag{7}$$

и функции Гамильтона $H_\Gamma = f(x, u, t) - \phi^T(t)\varphi(x, u, t)$, вызванные возмущением $\delta x(t)$ вектора переменных состояния, окажутся бесконечно-малыми. В частности функция Гамильтона по норме получит возмущение

$$\|dH_\Gamma\| = \frac{\|dH_\Gamma\|}{\|h\|} = \left\| \frac{d}{dx} f(x, u, t) - \phi^T(t) \frac{d}{dx} \varphi(x, u, t) \right\|^T dx = \\ \left\| f_x(x, u, t) - \phi^T(t) \varphi_x(x, u, t) \right\|^T dx. \tag{8}$$

Отсюда вытекает, что на основе функции Гамильтона могут быть получены условия стационарности функционала Лагранжа по переменным состояния

$$\dot{\phi}_i(t) = \frac{d}{dx_i} H_\Gamma = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_{jx_i}(x, u, t) - \sum_{i=0}^{m} \phi_j(t) \varphi_{jx_i}(x, u, t), i = \overline{1, n}, \tag{9}$$

полностью совпадающие с условиями стационарности, как метода классического вариационного исчисления, так и так называемого метода принципа максимума. В принципе максимума система дифференциальных уравнений (9) называется системой сопряженных уравнений.

Пусть в τ управление претерпевает разрыв первого рода величиной $v(\tau) \in U^{KH}$. Подобное возмущение управления в интервале $[\tau, \tau + \varepsilon]$ приводит совершенно к таким же возмущениям переменных состояния и функционала Лагранжа или функции Гамильтона, как и игольчатая вариация. Из этого следует, что и в точках разрыва управления существуют условия стационарности функционала Лагранжа по переменным состояния. Из полученного вытекает также, что для доказательства существования условий стационарности функционала Лагранжа по переменным состояния нет необходимости прибегать к понятию игольчатой вариации. Для объектов, переменные состояния которых не претерпевают разрывы, классическая вариация управления $\delta u(t)$ на всем интервале управления $\overline{t_1, t_2}$ и игольчатая вариация по существу приводит к одним и тем же бесконечно малым возмущениям траекторий и функционала Лагранжа или функции Гамильтона.

Для интегрирования полной системы дифференциальных уравнений [(1),(9)] как метод классического вариационного исчисления так, так и принцип максимума, используют одни и те же условия трансверсальности, если другие не даны. Одинаковые условия оба метода используют и для определения коэффициентов Лагранжа и оптимальных значений

ISSN 1562-9945

t_1^*, t_2^* начала t_1 и конца t_2 интервала управления в случае, если последние не фиксированы.

Выполненный анализ показывает, что метод классического вариационного исчисления и принцип максимума отличаются друг от друга одним лишь подходом поиска оптимального управления u^*.

В МКВИ оптимальное управление u^*определяется из набора стационарных управлений u^c, полученных из условия стационарности функционала Лагранжа или функции Гамильтона по управлению, если они существуют.

В методе ПМ оптимальное управление определяется непосредственно из условий оптимальности функционала Лагранжа или функции Гамильтона по управлению без привлечения условий стационарности. Но подобный подход поиска оптимального управления может быть предусмотрен и в процедуру метода классического вариационного исчисления для случая, когда условия стационарности функционала Лагранжа по управлению не существуют.

Из приведенного вытекает, что принцип максимума может быть выведен на основе метода классического вариационного исчисления путем включения в него дополнительного “блока” определения оптимального управления из условия оптимальности функционала Лагранжа по управлению. Полученный в результате такого усовершенствования метод может решать не только общую задачу управления Лагранжа, но и общую задачу Понтрягина, т.е. не только задач непрерывного, но и задач разрывного управления!

С учетом сказанного методика усовершенствованного метода решения задач оптимального управления имеет следующий вид:

1. На основе элементов постановки задач управления составляется функционал Лагранжа

$$\begin{gathered} L[x,u,t_1,t_2,\lambda,\phi(t)] = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j-0}^{m} \lambda_j f_j(x,u,t) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j(t)[\dot{x} - \varphi_j(x,u,t)] \right\} dt + \\ + \sum_{j=0}^{m} \lambda_j l[x(t_1), x(t_2), t_1, t_2]\}, \end{gathered} \tag{10}$$

приводящий исходную задачу к задаче на безусловный экстремум.

2. Составляются условия стационарности функционала Лагранжа по переменным состояния, представляющие собой систему дифференциальных уравнений для функций Лагранжа

$$\dot{\phi}_i(t) = \frac{d}{dx_i} H_\Gamma = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_{jx_i}(x,u,t) - \sum_{i=0}^{m} \phi_j(t) \varphi_{jx_i}(x,u,t), i = \overline{1,n}. \tag{11}$$

3. Составляются условия трансверсальности на левой и правой границах интервала управления, которые представляют собой граничные условия для функций Лагранжа

$$\phi_i(t_1) = \frac{d}{dx(t_1)}\lambda^T l[x(t_1), x(t_2), t_1, t_2]\, i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

4. Составляются условия стационарности функционала Лагранжа по началу и концу интервала управления

$$\frac{dL}{dt_1} = -\sum_{i-0}^{n} \lambda_i f[x(t_1), u(t_1), t_1] + \frac{d}{dt_1}\lambda^T l[x(t_1), x(t_2), t_1, t_2] \quad (13)$$

$$\frac{dL}{dt_2} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f[x(t_2), u(t_2), t_2] + \frac{d}{dt_2}\lambda^T l[x(t_1), x(t_2), t_1, t_2] \quad (14)$$

5. Составляются условия дополняющей нежосткости для неклассических ограничений

$$\lambda_i g_i = 0, i = \overline{1, m_1}. \quad (15)$$

6. Составляются условия неотрицательности коэффициентов Лагранжа

$$\lambda_i \geq 0, i = 0 \cup i = \overline{1, m_1} \quad (16)$$

7а) Составляются или условия стационарности функционала Лагранжа (функции Гамильтона) по управлению (если они существуют)

$$u_c = \arg\{L_u = o \rightarrow f_u = 0 \rightarrow (N_\Gamma)_u = 0\} \quad (17)$$

7в) Если условия стационарности функционала Лагранжа по управлению не существуют, то из условия оптимальности функционала Лагранжа или функции Гамильтона по управлению определяется в общем виде оптимальное управление:

$$u^* = \arg\left\{\frac{\min}{u} L = \frac{\min}{u} f(x, u, t) = \frac{\min}{u} H_\Gamma\right\} = u^*(x, \lambda, \phi) \quad (18)$$

Для случая существования стационарных условий экстремума функционала Лагранжа по управлению

8. Совместным решением условий (1,2, 11-17) находятся стационарные решения $\{u_c, x_c, t_{1c}, t_{2c}, \lambda_c, \phi_c\}$ задачи управления;

9. На основе достаточных условий экстремума или непосредственной проверкой стационарных решений $\{u_c, x_c, t_{1c}, t_{2c}, \lambda_c, \phi_c\}$ на оптимальность, находятся оптимальные решения задачи управления в виде шестерки $\{u^*, x^*, t_1^*, t_2^*, \lambda^*, \phi*\}$.

Достаточные условия экстремума используются в случае, если нас интересует характер оптимальности, а именно, оптимальность является сильной или слабой.

Непосредственная проверка стационарных решений $\{u_c, x_c, t_{1c}, t_{2c}, \lambda_c, \phi_c\}$ на оптимальность используется в случае, если нас интересует, оптимальность является глобальной или локальной.

 ISSN 1562-9945

Решение исходной задачи представляет собой четвертку элементов $\{u^*, x^*, t_1^*, t_2^*\} \in \{u^*, x^*, t_1^*, t_2^*, \lambda^*, \phi^*\}$.

Для случая несуществования стационарных условий экстремума функционала Лагранжа по управлению

8. Совместным решением условий (1,2, 11-16) с учетом найденного из (18) u^* находится оптимальное решение $\{u^*, x^*, t_1^*, t_2^*\}$ задачи управления.

Стационарные и оптимальные решения выполняются для двух случаев, а именно: а) $\lambda_0 = 0$, в) $\lambda_0 \neq 0$. Если при $\lambda_0 = 0$, все остальные коэффициенты λ_i и функции ϕ_i Лагранжа также будут равными нулю, то этот случай отбрасывается из рассмотрения.

Очевидно, что если управление найдено из условия (18) оптимальности функционала Лагранжа по управлению, в силу модели объекта управления отпадает необходимость проверки стационарных решений на оптимальность!

Выводы

1. Предложенный метод, полученный на основе рассмотренного расширения метода классического вариационного исчисления, позволяет решить как общую задачу управления Лагранжа, так и общую задачу управления Понтрягина, т.е. как задачи непрерывного управления, так и задачи разрывного управления.

При предложенном подходе понятия “игольчатая вариация”, “функция Понтрягина”, “принцип максимума”, “система сопряженных уравнений” отпадают ввиду их искусственности.

Литература

1. В.А. Бесекрский, Е.П. Попов Теория систем автоматического регулирования // Москва: Наука, 1972.-с. 768.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М, Фомин С.В. Оптимальное управление // Москва: Наука, 1979.- с. 429.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов // Издательство 4-е, перераб. и доп., Москва: Наука, 1983.- с. 392.