УДК 621.924.229.86

А.Г. Кику, В.М. Бурлаков

АНАЛИЗ СТЕПЕНИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ОБЛАСТЕЙ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Введение

Статья посвящена анализу степени доказательства и областей применимости основных методов оптимального управления, каковыми являются вариационные методы, метод динамического программирования и различные их интерпретации в виде методов математического программирования. Приведен анализ степени корреляции вариационных методов, обсуждены вопросы неприменимости принципа максимума и метода динамического программирования применительно к управлению отдельных классов динамических объектов.

Анализ существующих подходов доказательства методов оптимального управления

При выводе всех методов оптимального управления исходные задачи управления вводом в рассмотрение функционала Лагранжа предварительно приводятся к задачам на безусловный экстремум.

В классическом вариационном исчислении оптимальные решения находятся из множества их стационарных решений, которые в свою очередь определяются на основе необходимых условий экстремума функционалов Лагранжа, представляющие собой равенство нулю дифференциала функционала Лагранжа. Такой подход приводит к тому, что этот метод позволяет определить оптимальные управления из класса непрерывных.

В принципе максимума, являющимся неклассическим вариационным методом, оптимальное управление определяется сразу их условия оптимальности функционала Лагранжа по управлению, а все остальные элементы оптимального решения определяются по существу классическим подходом. Последнее приводит к его неприменимости для случая, когда разрывные управления приводят к разрывным траекториям.

Метод динамического программирования в существующем виде выведен лишь для случая объектов с непересекающимися траекториями переменных состояния.

Постановка задач исследования

Вышеприведенный анализ естественным образом приводит к возникновению следующих важных задач:

1. Анализ степени корреляции между методом классического вариационного исчисления и принципом максимума;

 ISSN 1562-9945

2. Осуждение степени теоретической важности принципа максимума на основе решения первой задачи;
3. Определение области применимости принципа максимума;
4. Определение области применимости метода динамического программирования в существующем виде.

Анализ методов оптимального управления

При изложении содержании содержания статьи использованы понятия “динамический объект общего вида” и “объект, определенный состоянием”.

Под объектом общего вида здесь понимаются объекты с производными в правых частях их дифференциальных уравнений:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} p^i y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_{n-i} p^i u(t), m \neq 0, p = d/dt, p_i y_0, i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad (1)$$

где $u(t)$, $y(t)$ – вход и выход объекта, $p^i y_0$ – начальные условия.

При решении дифференциальных уравнений этих объектов начальные условия $p^i y_0$ переменной $y(t)$ должны быть пересчитаны в условия y_{0+}. Например, при скачкообразном входе $u(t) = 1(t)$ объекта

$$\begin{array}{l} y_{0+} = y_{0+}, \ldots, p^{n-m-1} y_{0+} = p^{n-m-1} y_{0+}, \\ p^{n-m} y_{0+} = p^{n-m} y_0 + b_0, \\ p^{n-m+1} y_{0+} = p^{n-m+1} y_0 + b_1 - a_1 [p^{n-m} y_{+0} - p^{n-m} y_0], \\ \ldots\ldots \\ p^{n-1} y_{0+} = p^{n-1} y_0 + b_{m-1} - a_{m-1} [p^{n-m} y_{0+} - p^{n-m} y_0] - \ldots \\ -a_1 p^{n-m} y_{0+} - p^{n-m} y_{-0} [p^{n-2} y_{0+} - p^{n-2} y_0]. \end{array} \quad (2)$$

Таким образам, при разрывных $u(t)$ производные $p^{n-m} y(t), \ldots, p^{n-1} y(t)$ выходных величин претерпевают соответствующие разрывы.

Под объектами определенными (неопределенными) состоянием понимаются объекты с непересекающимися (пересекающимися) траекториями переменных состояния в их фазовых пространствах (Рис. 1 и Рис. 2 соответственно).

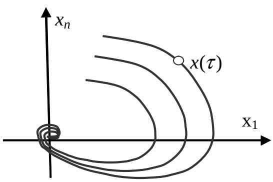

Рис. 1

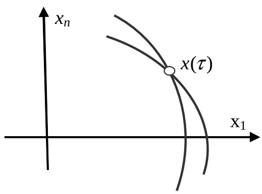

Рис. 2

Метод классического вариационного исчисления позволяет решить общую задачу управления Лагранжа, постановка которой имеет следующий вид:

$$[x^*(t), u^*(t), t_1^*, t_2^*]^T = \arg\{\frac{\min}{x,u,t_1,t_2}\{\int_{t_1}^{t_2} f_0[x(t), u(t), t]dt + l_0[x(t_1), x(t_2)] \\ \dot{x}(t) = \varphi[x(t), u(t), t], g^I \leqslant 0, g^{II} = 0, g^{II} = 0, \tag{3}$$

где $x(t) = [x_1(t) \ldots x_n(t)]^T$, $u(t) = [u_1(t) \ldots u_r(t)]^T$ – вектора переменных состояния и управления, $\varphi(t) = [\varphi(t)_1 \ldots \varphi_n(t)]^T$, $g^I = [g_1^I \ldots g_{m_1}^I]^T$, $g^{II} = [g_{m_1+1}^{II} \ldots g_m^{II}]^T$ – вектор-функции производных x, неклассических и классических ограничений, $[t_1, t_2]$ – интервал управления. Структуры выражений g_i^I, g_j^{II} в общем случае совпадают со структурой критерия оптимальности. Функции $f_i, i = 0, \ldots, m$; $g_i, i = 0, \ldots, m; l_i, i = 0, \ldots, m$; $\varphi_i, x_i, i = 1, \ldots, n$; $u_i, i = 1, \ldots, r$ – непрерывны и дифференцируемы по своим аргументам. Последнее представляет основное ограничение применимости МКВИ, приводящее к тому, что им методом в чистом виде могут быть найдены лишь управления из класса непрерывных дифференцируемых функций времени.

Идея метода классического вариационного исчисления состоит в поиске оптимальных решений $\{x^*, u^*, t_1^*, t_2^*, \lambda^*, \varphi^*)$ функционалов Лагранжа

$$L[x, u, t_1 t_2, \lambda, \phi(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \{[\lambda^T f(x, u, t) + \phi^T(t)[\dot{x} - \varphi(x, u, t)]dt + \lambda^T l[x(t_1), x(t_2)]\}, \tag{4}$$

где λ, $\phi(t)$ – коэффициенты и функции Лагранжа, из множества их стационарных решений $\{x^c, u^c, t_1^c, t_2^c, \lambda^c, \varphi^c)$, которые определяются необходимыми условиями оптимальности L. Последние в свою очередь выражаются равенством нулю на $\{x^*, u^*, t_1^*, t_2^*, \lambda^*, \varphi^*)$ дифференциалов функционалов Лагранжа, обусловленных дифференциалами норм управления на всем интервале управления (Рис .3)

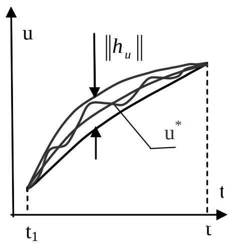

Рис. 3

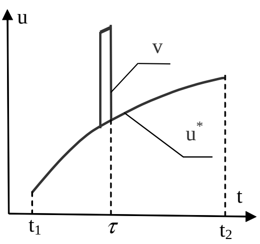

Рис. 4

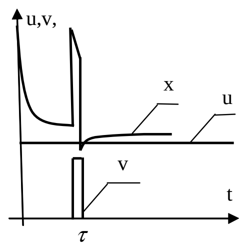

Рис. 5

Принцип максимума (или **принцип минимума**) позволяет решить общую задачу управления Понтрягина, постановка которой отличается от постановки общей задачи управления Лагранжа наличием ограничения на управление $u \subset U^{KH}$, где U^{KH} – множество кусочно-непрерывных функций с ограниченным числом разрывов первого рода.

Принцип максимума относится к неклассическим вариационным методам. Его не классичность с одной стороны обусловлена тем, что оптимальное управление определяется сразу из условия минимума функционала Лагранжа (или функции Гамильтона) без привлечения условия его стационарности по управлению, а с другой стороны тем, что в нем вывод необходимых условий экстремума функционалов Лагранжа находятся при помощи их дифференциалов, зависящих по существу от дифференциалов энергии управления, сконцентрированных в дифференциалах времени (Рис. 4). Носителями таких дифференциалов энергии являются известные игольчатые вариации. Так как последние являются разрывными функциями, то на управление нет необходимости накладывать требование непрерывности.

Однако здесь уместны нижеследующие важные замечания.

1. “Игольчатые” дифференциалы энергии управления для объектов общего вида приводят к разрывным переменным состояния, а не к дифференциалам норм траекторий производных их выходных величин, на основе которых в принципе максимума формулируются необходимые условия экстремума функционалов Лагранжа по переменным состояния. (На Рис.5 изображены графики функций $u(t)$, $v(t)$, $x(t)$ для объекта $a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$, где $v(t)$ – игольчатая вариация $u(t)$). Более того, в таких случаях игольчатые вариации управления могут привести и к недопустимым вариациям переменных состояния и функционала качества.

2. Для обычных объектов, описываемых дифференциальными уравнениями без наличия производных в их правых частях

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^i y(t) = b_0 u(t), m = 0, p = d/dt, p^i y_0, i = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

игольчатые дифференциалы энергий и дифференциалы энергий, распределенных во всем интервале управления, приводят по существу к тем же дифференциалам норм выходных величин, их производных и критерия оптимальности:

Из первого замечания следует, что принцип максимума для объектов общего не применим или, в крайнем случае, не доказан.

Из второго замечания следует, что принцип максимума для объектов обычного вида, для которых он и справедлив, немедленно вытекает из метода классического вариационного исчисления, если в последнем снять ограничение непрерывности управления, а в его методике оптимальное управление определить непосредственно из условия оптимальности функционала Лагранжа по управлению, что и имеет место в принципе максимума! Действительно, методики решения задач оптимального управления методами классического вариационного исчисления и принципом максимума отличаются друг от друга лишь указанным элементом. Все остальные их элементы (функционалы Лагранжа, условия стационарности по переменным состояния, началу t_1 и концу t_2 интервала управления, условия трансверсальности, дополняющей нежосткости и не отрицательности коэффициентов Лагранжа) одинаковы.

По-видимому, авторы метода классического вариационного исчисления (Эйлер, Лагранж и др.) ограничились его созданием в существующем виде, так как задачами оптимального разрывного управления объектами обычного вида в прикладном плане никто в то время не занимался.

3. Ввиду того, что разрывные управления для объектов общего вида приводят к разрывным траекториям выходных величин и их производных, в том числе и недопустимым, то в постановках задач оптимального управления должны быть предусмотрены ограничения на величины подобных разрывов.

Приведенные замечания в некоторой степени вызывают удивления: разработчики принципа максимума это не заметили или не хотели отметить.

Кроме этого целесообразно отметить, что по существу в принципе максимума ввод в рассмотрение функции Понтрягина $H_{\Pi} = \phi^T(t)\varphi(x,u,t) - \lambda^T f(x,u,t)$ является искусственным и ничем не обоснованным элементом. Так как в большинстве случаев задачи оптимального управления формулируются в виде задач на минимум, авторы принципа максимума вполне могли обходиться более естественной функцией Гамильтона $H_{\Gamma} = \lambda^T f(x,u,t) - \phi^T(t)\varphi(x,u,t) = -H_{\Pi}$. В крайнем случае, этот метод получил бы единственное название.

Метод динамического программирования основан на так называемом принципе оптимальности, требующем чтобы стратегия управления на оставшихся интервалах времени должна быть выбрана из условия оптимальности общего критерия качества. При этом стратегия управления зависит только от текущего состояния объекта управления и совершенно не зависит от его предыстории. Однако последнее утверждение справедливо лишь для объектов, фазовые траектории которых не пересекаются, т.е. для объектов определенных состоянием. Для объектов неопределенных состоянием от точек пересечения траекторий $x(\tau)$ (см. Рис. 2) стратегия управления на оставшемся интервале времени $t \subset [\tau, t_2]$, очевидно, должна быть выбрана с учетом предыстории объекта, приводящей его в текущее состояние $x(\tau)$. Отсюда вытекает, что метод динамического программирования для таких случаев нуждается в доработке.

Метод динамического программирования обладает существенным преимуществами перед остальными методами оптимального управления, так как он, помимо того, что сразу приводит к решению задач аналитического конструирования регуляторов, в явном виде указывает, что процесс решения задач оптимального управления неизбежно должен содержать этап их "просматривания" от конца интервала управления t_2 к его началу t_1. А это означает, что непрогнозируемые с конца интервала управления объекты принципиально не могут быть оптимально

 ISSN 1562-9945

управляемы. Это имеет место в неявном виде и в вариационных методах оптимального управления и выражается в следующем:

1. Для интегрирования системы дифференциальных уравнений объекта управления и функций Лагранжа (Понтрягина) половина условий заданы или могут быть определены из условий трансверсальности на правой границе интервала управления. А это означает, что половина дифференциальных уравнений по существу должна быть решена в обратном времени, что и составляет суть этапа “просмотра” задачи с конца интервала управления к его началу.

2. Постановки задач оптимального управления в вариационных методах формулируются в виде задач одновременного поиска и оптимального управления и оптимальных переменных состояния.

Первый этап процедур решения задач оптимального управления является наиболее трудным. В этом ничего удивительного нет, так как именно его выполнение приводит по существу к определению алгоритмов управления, что имеет место в методе динамического программирования.

В конце следует отметить, что, так как метод динамического программирования в явном виде раскрывает общую структуру процедур решения задач оптимального управления и связанные с ней основные принципиальные трудности, то он обладает методологическим преимуществом перед вариационными методами. В связи с этим с методической точки зрения знакомство с методами оптимального управления целесообразно начинать именно с методом динамического программирования.

Выводы

На основе выполненных исследований могут быть сделаны следующие выводы:

1. Метод классического вариационного исчисления может быть распространен на класс задач с разрывным управлением объектами обычного вида, если в нем процедуру определения оптимального управления из множества стационарных управлений заменить на процедуру его определения непосредственно из условия оптимальности функционала Лагранжа (или функции Гамильтона) по управлению;

2. Принцип максимума Понтрягина в существующей разработке несправедлив для объектов общего вида;

3. Принцип максимума для объектов обычного вида, для которых он и справедлив, по существу представляет собой видоизмененный классический метод вариационного исчисления, в котором оптимальное управление находится без привлечения условия стационарности функционала Лагранжа по управлению, а непосредственно из условия оптимальности последнего;

4. Принцип максимума в свете первых выводов представляет собой по существу искусственное понятие с неудачным названием;

5. Метод динамического программирования нуждается в доработке для его распространения на класс задач управления объектами неопре-

деленными состоянием.

Литература

1. В.А.Бесекерский, Е.П.Попов Теория систем автоматического регулирования // Москва: Наука, 1972.-с. 768.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М, Фомин С.В. Оптимальное управление // Москва: Наука, 1979.- с. 429.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов // Издательство 4-е, перераб. и доп., Москва: Наука, 1983.- с. 392.
4. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами // Москва: Радио и связь, 1982.- с. 396.
5. Bellman R. Mathematical Optimization Techniques // University or California Press, Berkeley, 1963.

 ISSN 1562-9945