УДК 519.863

В.Л. Шевченко

ЛОГІСТИЧНА SL-ЗГОРТКА ТА ЛОГІСТИЧНА SL-СПЛАЙН ІНТЕРПОЛЯЦІЯ В МОДЕЛЯХ ПРОЦЕСІВ РОЗВИТКУ

Аналіз останніх досліджень і публікацій та виділення невирішених частин проблеми

В практиці економічних розрахунків дуже часто віддають перевагу методикам, що надають швидку відповідь на питання та некритичні до вхідних даних, навіть якщо вони не мають досконалої точності. Досить розповсюдженим є простий але ефективний математичний прийом лінійної згортки. Це стосується побудови багатофакторних економічних моделей [1, 2], вирішення багатокритеріальних [3, 4, 5] та інших задач. В цих задачах використовується простота та наочність лінійної згортки.

Але добре відоме що навіть якщо реальні об'єкти на певної ділянці розвитку можуть бути представлені лінійними моделями, майже всі вони мають обмеження на свої змінні. Введення двосторонніх обмежень перетворює лінійну модель на ступінчасту з нахиленою середньою частиною, що ускладнює математичне описання, та робить розриви у похідних відповідних залежностей. Використання лінійної згортки в багатокритеріальних задачах теж має свої проблеми, якщо в них не враховані обмеження на вагові величини оцінок. Наприклад, якість телевізору у якому відсутнє зображення ніяк не може бути повернута до 100% за рахунок іншого показника, наприклад якості звуку [5].

Актуальність і постановка задачі

Таким чином, актуальними є заміна лінійної згортки деякої плавною функцією при одночасному вирішенні декількох задач: збереження переваг лінійної згортки, які забезпечили їй широке застосування; модифікування лінійної згортки таким чином, щоб врахувати існуючі обмеження та забезпечити безперервність похідних; забезпечити простоту переходу від лінійної моделі з обмеженням до нової плавної функції. Сформульовану задачу доцільно поширити на випадок ступінчастої функції в якої перемежаються декілька ділянок зростання та постійності функції.

Одним з методів зняття обмежень є заміна лінійної функції з двосторонніми обмеженнями на логістичні функції у вигляді канонічних SL-функцій [6, 7].

$$SL(x) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-c \cdot x}}, \tag{1}$$

де a, b, c – коефіцієнти.

Мета роботи

Метою роботи є дослідити можливість використання логістичних SL- функцій для заміни лінійної згортки та лінійних ступінчастих функцій таким чином, щоб забезпечити простоту визначення параметрів SL-функцій, забезпечити простоту переходу від лінійних до SL- функцій.

Лінійні функції широко використовуються в моделях, оскільки дозволяють з єдиних позицій, без суттєвих зусиль, описувати різноманітні, навіть нелінійні, явища. Але якщо в останньому випадку, ви починаєте зміщуватись з точки лінеаризації, то коефіцієнти потребують перерахування. Крім того відбувається небажане маскування нелінійного характеру явища, що моделюється. Серед нелінійних процесів часто зустрічаються ступінчаті, тобто процесі в графіках яких горизонтальні лінійні ділянки перемежаються з близькими до лінійних нахиленими ділянками. Для моделювання таких залежностей зручно використовувати SL-функції тому, що завдяки їм можливо залишити логіку аналізу на рівні близькому до лінійних моделей, але отримати більшу адекватність у всьому діапазоні аргументів, а не лише поблизу точки лінеаризації.

Ступінчату функцію (рис. 1), що апроксимована SL- функціями надалі називатиме SL- ступінчатою функцією (або SSL- функцією, від англ. “stage” SL), з метою підкреслити властивість SSL- функції щодо плавності переходів між лінійними ділянками, яка забезпечує безперервність SSL- функції та всіх її похідних.

Замість традиційної лінійної згортки пропонується використовувати залежність виду (2), яку надалі будемо називати SL- згорткою. У виразі (2) відсутні вагові коефіцієнти тому що вони входять в склад SL- функцій у якості комбінації показників, що забезпечують завданий нахил функції на квазілінійної нахиленої ділянці функції.

$$SSL(x) = \sum_{i=1}^{n} SL_i^{SSL}(x) \tag{2}$$

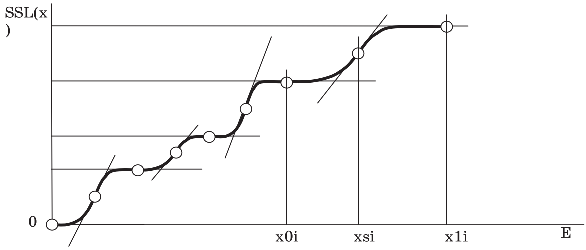

Рис. 1 – Ступінчаста SSL-функція

На прикладах виділимо дві основні ситуації, в яких загальний вид та метод аналізу SSL-функції можуть суттєво відрізнятись.

Ситуація 1. Неврегульований ринок. Наприклад, процес зміни комп’ютерних технологій. В умовах жорсткої конкуренції нові технології змінюють попередні до того, як ті, не то що окупили себе, а навіть до того як вони досягли максимуму своїх можливостей. В моделі такого процесу окремі SL-функції переходять одна в другу на будь-яких ділянках. Тобто існує висока вірогідність початку наступної ділянки росту до того, як попередня функція досягла своєї зони насичення.

Ситуація 2. Врегульований ринок. До цього випадку можна віднести ринки, що більш підлягають централізованому (в першу чергу державному) регульованою, наприклад внутрішні ринки озброєнь. Якщо система озброєння ще не відпрацювала свій технічний ресурс та не досягла рівня морального старіння, то зміна технології буде стримуватись директивно. В цьому випадку окремі SL- функції переходять одна в другу лише на горизонтальних ділянках (саме такий приклад наведений на рисунку 1). Таке припущення дозволяє з невеликою помилкою апроксимувати загальну SSL- функцію сплайн- послідовністю SL- функцій (надалі SL- сплайн- функцій), тобто перейти на окремих ділянках до аналізу окремих $SL_i^(x)$ функцій. При цьому кожна зі складових функції $SL_i(x)$ характеризується координатами точки симетрії x_{si}, координатами точок смички з сусідніми функціями, відповідно, зліва та зправа x_{0i}, x_{1i} та кутом нахилу функції в точки симетрії. В загальному випадку складові $SL_i^{SSL}(x)$ і апроксимуючі $SL_i^(x)$ функції близькі одна до одної але не співпадають повністю. Повне співпадіння можливе лише в тому випадку, коли в точках смички суміжних функцій відсутні вимоги до безперервності апроксимуючої сплайн- залежності та її похідних. Якщо не висувати вимоги до безперервності апроксимуючої сплайн- функції, та її похідних, то без будь яких попередніх перетворень сплайн- функції можуть бути описані залежністю

$$SSL_i(x) = \ SL_i^{SSL}(x), \ \ x_{0i} \leqslant x \leqslant x_{1i} \ , \quad i = 1, n, \tag{3}$$

де n- кількість сплайн- функцій виду $SSL_i(x)$, які будуть змикатись зі суміжними $SSL_{i-1}(x)$ та $SSL_{i+1}(x)$ приблизно. Якщо висунуті вимоги до безперервності апроксимуючої сплайн- функції, та її похідних, то мають бути задоволені обмеження

$$\begin{gathered} SSL_i(x_{1,i}) = SSL_{i+1}(x_{1,i}); \frac{d^j SSL_i(x_{1,i})}{dx^j} = \frac{d^j SSL_{i+1}(x_{1,i})}{dx^j}; \\ j = 1, l; \ i = 1, n-1, \end{gathered} \tag{4}$$

де l – максимальний порядок похідної до якої висунуті вимоги безперервності („м’яка” смичка l-го порядку).

В зв’язку з тим, що SL- функції лише наближаються до своїх асимптот, але ніколи їм не дорівнюють, то „м’яка” смичка SL- функції з різними чисельними параметрами дуже ускладнена, а при наявності жорстких вимог то точок смички, симетрії та куту нахилу в точки симетрії і зовсім неможлива. Щоб забезпечити виконання перелічених умов, додамо до SL-сплайну квазілінійну добавку зі змінним кутом нахилу $A_{k,i}(x)$ та адитивної складової $B_{k,i}$ (рис. 2).

$$SSL_i(x) = B_{k,i} + A_{k,i}(x) \cdot x + SL_i^{SSL}(x) = \\ B_{k,i} + \frac{a_{k,i} \cdot x}{1+e^{-c_{k,i} \cdot (x - \Delta x_{k,i})}} + \frac{a_{SSL,i}}{1+e^{-c_{SSL,i} \cdot (x - \Delta x_{SSL,i})}} \tag{5}$$

При цьому, $A_{k,i}(x)$ має змінятись в дуже невеликих межах, щоб забезпечити умови смички. Оскільки одної з переваг SSL- функцій є наявність якісно зрозумілих лінійних ділянок, то зміну кута нахилу асимптот первинної SL- функції бажано виконувати поза межами лінійних ділянок, тобто поблизу точок первинної SL- функції $SL_i^{SSL}(x)$ з абсцисами $x_{s,i} + T_i$ або $x_{s,i} - T_i$.

$$x_{0i} \approx x_{xi} - T_i x_{si} \approx x_{xi} + T_i x_{1i}$$

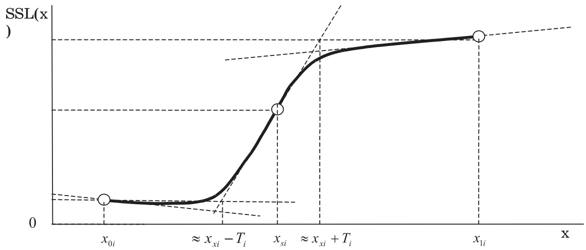

Рис. 2 – Окрема ділянка SL-сплайн функції

Тоді визначимо

$$\Delta x_{k,i} = \Delta x_{SSL,i} \pm T_{SSL,i}, \tag{6}$$

де $T_{SSL,i}$ – період $SL_i^{SSL}(x)$ [6, 7]. Швидкість зміни кута нахилу асимптот функції $SL_i^{SSL}(x)$ залежить від постановки задачі (див. Таблицю 1) і може враховуватись шляхом вибору коефіцієнту пропорційності k_c, що підпорядковується співвідношенню

$$c_{k,i} = k_{c,i} \cdot c_{SSL,i}. \tag{7}$$

Таким чином, в рівнянні (5) залишається 5 невизначених параметрів: $B_{k,i}, a_{k,i}, a_{SSL,i}, c_{SSL,i}, \Delta x_{SSL,i}$. В якості початкових даних розглядаємо:

1. Значення сплайн- функцій, їх перших та других похідних в початкової та кінцевої точках процесу.

2. Координати точок симетрії $SSL_i(x_{s,i}) = SSL_{s,i}$ та величини кутів нахилу дотичних $dSSL_i(x_{s,i})/dx = dSSL_{s,i}$ в точках симетрії первинних функцій.

3. Значення сплайн- функції в точках їх смички $SSL_i(x_{1,i}) = SSL_{1,i}$.

Звичайно, при сплайн- інтерполяції, вважається [8], що найбільш природною для більшості безперервних процесів е модель, що в механіці відповідає моделі пружного стержня, тобто модель що вимагає рівняння в

Табл. 1 – Характер зміни кута нахилу асимптот та факти порушення лінійності ділянок первинної SL- функції в залежності від величини k_c

Величина k_c	Характер зміни кута нахилу асимптот та факти порушення лінійності ділянок первинної SL- функції
< 5	Порушення лінійності на наближеної горизонтальної та на нахиленої ділянках
5-10	Плавна зміна кута нахилу
>10	Жорстка (швидка) зміна кута нахилу
>100	Практично миттєва зміна кута нахилу (релейна характеристика)

точках змички значень сплайн- функцій, їх перших та других похідних. Тоді для знаходження $5\times n$ невідомих параметрів для n сплайн- функцій ми маємо $3 \times (n-1)$ рівнянь що описують обмеження в точках смички

$$SSL_i(x_{1,i}) = SSL_{1,i}, \quad \frac{dSSL_i(x_{1,i})}{dx} = \frac{dSSL_{i+1}(x_{1,i})}{dx}, \\ \frac{d^2SSL_i(x_{1,i})}{dx^2} = \frac{d^2SSL_{i+1}(x_{1,i})}{dx^2}, \tag{8}$$

де $i = \overline{1, n-1}$,

$2 \times (n-1)$ рівнянь що описують обмеження в точках симетрії

$$SSL_i(x_{s,i}) = SSL_{s,i}, \quad \frac{dSSL_i(x_{s,i})}{dx} = dSSL_{s,i}, \quad i = \overline{1, n-1} \tag{9}$$

та 5 рівнянь, що задають крайові умови

$$SSL_1(0) = SSL_{0,1}, \quad dSSL_1(0)/dx = dSSL_{0,1}, \quad d^2SSL_1(0)/dx^2 = ddSSL_{0,1}, \tag{10}$$

$$SSL_n(x_{1,n}) = SSL_{1,n}, \quad dSSL_n(x_{1,n})/dx = dSSL_{1,n}. \tag{11}$$

Всього маємо $5 \times n$ рівнянь, що дозволяють знайти всі невідомі параметри сплайн- функцій.

Висновки

Таким чином у роботі введені поняття SL- згортки та SL-сплайн інтерполяції. Розроблена процедура визначення параметрів SL-сплайн функції, що забезпечую її плавність до другої похідної.

Перспективи подальших досліджень

Напрямками подальших досліджень мають бути поширення викладених підходів на багатовимірну інтерполяцію та впровадження розроблених підходів у практичне моделювання процесів розвитку.

Литература

1. Основы теории и методологии планирования строительства вооруженных сил Росийской Федерации/ А.В.Квашнин, В.И.Останков,

В.Л.Манько и др.; Под ред. А.В.Квашнина.- М.: Воентехиздат, 2002. - 232 с.

2. Облік оборонних ресурсів за допомогою формуляра військової частини. Частина 1. Методики опрацювання формуляра. Монографія / В.Л. Шевченко, Є.Ф. Шелест, Р.М. Федоренко та ін. / За ред. Є.Ф. Шелеста, В.Л. Шевченка. – К.: ННДЦ ОТ і ВБ України, ГШ ЗС України, 2003. – 160 с.
3. Управління оборонними ресурсами в Збройних Силах України. Монографія / В.Л. Шевченко, М.І. Шпура, Р.М. Федоренко та ін. / За ред. В. Шевченка. – К.: ННДЦ ОТ і ВБ України, 2002. – 84 с.
4. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения: Пер. с англ./ Под ред. И.Ф.Шахнова. - М.: Радио и связь, 1981. - 560 с., ил.
5. www.gorskiy.ru/Articles/Dmss/part06.html
6. Шевченко В.Л. Застосування логістичних функцій для спрощення процедури оптимізації екологічних процесів методом достатніх умов оптимальності В.Ф.Кротова// Збірник наукових праць. Вип. 2 (27) / Редкол.: Шпура М.І. (голова) та ін. – Київ: ННДЦ ОТ і ВБ України, 2005. – С. 159-167.
7. Шевченко В.Л. „Застосування залежностей з обмеженням зросту для спрощення побудови прогнозуючих моделей військово – економічних процесів”. Науково-технічний збірник. Випуск 4. За редакцією Шпури М.І. – Київ: ННДЦ ОТ і ВБ України, 2004. – с. 111 – 117.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб.пособие.- М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат. лит., 1987. – 600 с.

 ISSN 1562-9945