

УДК 536.12

В.М. Ігнатенко, К.Х. Зеленський, К.С. Бовсуновська

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАКРУЧЕНИХ ПОТОКІВ У ЦИКЛОННИХ КАМЕРАХ

Анотація: Виконано аналіз процесу очищення газових сумішей у циклонних камерах. Сформульовано математичну модель динаміки руху суміші, ентальпії та гідравлічного тиску у циклонній камері із закрученими потоками суміші як систему нелінійних диференціальних рівнянь математичної фізики. Запропоновано числово-аналітичний метод розв'язання системи квазілінійних рівнянь руху газоповітряної суміші та ентальпії. Виконано комп'ютерне моделювання розроблених алгоритмів.

Ключові слова: Ключові слова: ентальпія, закручені потоки, рівняння Нав'є—Стокса, ітераційний процес, інтегральні перетворення, ланцюгові дроби, функції Бесселя.

Циклонні камери широко використовують як сепаратори або як апарати для відокремлення частинок у рідинно-газових потоках завдяки їх простій конструкції та низькій вартості. Завдяки досягненню у визначенні різних частин циклонів стало можливим класифікувати частинки пилу із діаметром меншим за мікрони. Ці досягнення ґрунтуються на моделюванні тривимірних рівняннях переносу (рівняннях Нав'є—Стокса), руху частинок, температури та статичного тиску.

У циклонах осаджування сухої золи здійснюється під впливом відцентрового ефекту. При надходженні через тангенціальний патрубок 1 (рис. 1, [1]) або лопатки, що закручують 6, частинки відтискуються до внутрішніх стінок корпусу 3, і внаслідок втрати швидкості випадають в індивідуальні 4 або загальні 7 буржерінакопичувачі (у батарейних циклонах) і потім по трубопроводам 5 відводяться у системи транспортування золи. Очищений газ по трубах 2 виводиться у газоходи або збірні камери. Відцентровий ефект сильніше проявляється у крупних частинках. Зі збільшенням розміру частинок і зменшенням діаметру циклону ефективність очищення збільшується.

Шлях до підвищення ефективності очищення газових сумішей у циклонних камерах полягає у визначенні динаміки руху суміші, ентальпії, гідравлічного тиску у камері.

Основна особливість закручених потоків, [2], – це розмірне співвідношення двох (осьової і тангенціальної), а у деяких випадках і трьох складових швидкості, а також наявність радіального і осьового градієнтів тиску. За помірної і сильної закрутки газових потоків осьова швидкість біля стінки значно перевищує розхідне значення, а біля осі утворюється “провал”, або зона зворотних течій.

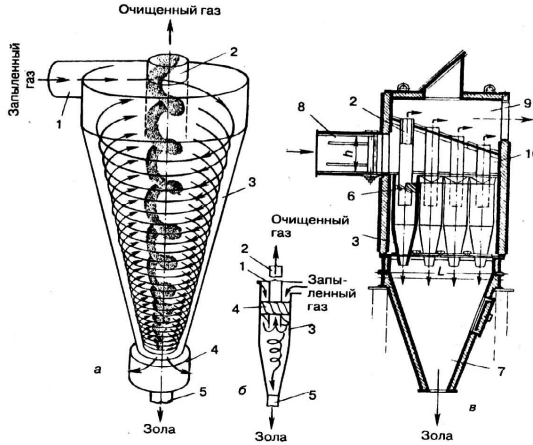


Рис. 1 – Циклонні пиловловлювачі

Завдяки силам в'язкості здійснюється неперервне змінювання структури закрученого потоку за довжиною каналу аж до повного виродження обертового руху. Тому у таких умовах не існує стабілізованої закрученої течії. Внаслідок зменшення інтенсивності закрутки за довжиною каналу статичний тиск на стінці зменшується, а у при осьовій області збільшується. В області біля стінки при цьому наявна течія із від'ємним градієнтом тиску, а у зоні біля стінки – із додатним, що суттєво відрізняє закручений потік від осьового. Нерівномірність поведінки закрученого потоку за довжиною каналу є причина ускладнення механізму процесів, які протікають у такому потоці, і труднощів виявлення закономірностей, що управляють цими процесами. Характерна особливість закручених потоків також є радіальний градієнт статичного тиску. Суттєві радіальні градієнти осьової і обертальної швидкостей, статичного тиску сприяють виникненню інтенсивних турбулентних пульсацій.

Завихрителі, що використовують на практиці, класифікують за різними ознаками: за способом закрутки, характером закрутки, протяжності пристрою, що закручує. За повної закрутки на вході у трубу розташовують пристрій, що закручує, завдяки якому виникає тангенціальна складова швидкості по усьому поперечному перетину труби. До таких пристроїв належать завихрителі двох типів. До першого із них належать завихрителі, в яких потоку надається тангенціальний (обертальний) рух, що перетворюється у межах вихідного патрубку завихрителя у поступально-обертальний рух. Це – завихрителі тангенціального, улиткового і тангенціально-лопаткового типів.

Розподіл повної u і тангенціальної u_ϕ швидкостей практично

збігається за всюю довжиною циклонної камери. При збільшенні радіусу камери тангенціальна складова швидко спочатку збільшується до свого максимального значення u_φ^0 , а потім зменшується. Цей розподіл обумовлює характерний для циклонних камер розподіл статичного тиску, що має максимум у стінки камери і зменшується до її осі, приймаючи від'ємне значення.

Система рівнянь, яка описує розповсюдження швидкостей, температур і концентрацій у закручених потоках, зручно подати у циліндричній системі координат. За припущення про існування коефіцієнтів турбулентного обміну тривимірні рівняння мають вигляд [3]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_r \Phi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho u_\varphi \Phi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho u_z \Phi)}{\partial z} = \\ & = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\gamma_\Phi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + S_\Phi, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\Phi = [u_r, u_\varphi, u_z, k, c^*, h]$ – вектор залежних змінних, а відповідні значення

$$\begin{aligned} \gamma_\Phi &= [\mu_{ef}, \mu_{ef}, \mu_{ef}, \mu_{ef}/\sigma_k, \mu_{ef}/\sigma_c, \mu_{ef}/\sigma_h], \\ S_{u_r} &= \frac{\rho u_\varphi^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u_r^2}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) - 2 \frac{\mu_{ef}}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{ef} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} S_{u_\varphi} &= \frac{\rho u_r u_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu_{ef} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \right] + \frac{\mu_{ef}}{r} \left(r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[r \mu_{ef} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2u_r}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{ef} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right); \end{aligned} \quad (3)$$

$$S_{u_z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r \mu_{ef} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_{ef} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right); \quad (4)$$

$$S_k = G_k - \rho c^*; \quad S_{c^*} = (C_1 c^* G_k - C_2 \rho c^{*2}) / k; \quad (5)$$

$$G_k = \mu_t \left[2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{r \partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{r \partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Для системи рівнянь (1) – (5) в області

$\bar{D} = D \cup S = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq H, t \geq 0\}$ формулюються відповідні початкові та межові умови:

$$\begin{aligned} v_r|_{t=0} &= \mu_1(r, \varphi, z); \quad v_\varphi|_{t=0} = \mu_2(r, \varphi, z); \quad v_z|_{t=0} = \mu_3(r, \varphi, z); \\ h|_{t=0} &= \mu_0(r, \varphi, z); \quad c^*|_{t=0} = \mu_4(r, \varphi, z) \end{aligned} \quad (7)$$

$$v_r|_S = \xi_1(t); \quad v_\varphi|_S = \xi_2(t); \quad v_z|_S = \xi_3(t); \quad h|_S = \xi_0(t); \quad c^*|_S = \xi_4(t) \quad (8)$$

Прийmemo, на першому етапі, що коефіцієнт μ_{ef} приймає ефективне значення, що дорівнює сумі молекулярної $\mu(T)$ і турбулентної μ_t в'язкостей, яку позначимо як μ_* . Також вважатимемо $\rho = \text{const}$. Залежність молекулярної в'язкості від температури часто подається у вигляді емпіричних залежностей, які отримують шляхом узагальнення експериментальних даних. Так, формула Сатерленда [3] має вигляд

$$\mu(T) = \mu_0 \frac{273 - C}{T + C} \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2},$$

де C – безрозмірний коефіцієнт, що залежить від виду газу; T – абсолютна температура.

Задача (1)–(8) – нелінійна крайова задача. Числовим методам розв'язання задач аеродинаміки і теплообміну у циклонних камерах присвячена значна кількість наукових публікацій [3,4], у переважній більшості яких моделювання руху сумішей виконується за припущення сталості складових швидкості їхнього руху. Такий підхід має сенс при визначенні геометричних параметрів при проектуванні циклонних камер.

Необхідність коректного визначення складових швидкості та температури як функцій просторових координат та часу пов'язана із вирішенням задачі оптимального розділення суміші газових потоків у циклонній камері.

Математичне моделювання розподілу компонент швидкості руху суміші та її температури будемо виконувати за ітераційною схемою [6]. Подамо систему рівнянь (1)–(6) у такому вигляді:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\gamma \Phi}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{\rho} N_{\Phi}, \quad (9)$$

$$N_{\Phi} = \mathbf{S}_{\Phi} - \rho \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (u_r \Phi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_{\varphi} \Phi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial (u_z \Phi)}{\partial z} \right]. \quad (10)$$

Із урахуванням наведених обмежень відносно μ_{ef} та ρ запишемо вирази для \mathbf{S}_{Φ} .

$$S_{u_r} = \frac{\rho u_{\varphi}^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu_* \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r^2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r \frac{\partial u_{\varphi} / r}{\partial r} \right) - 2 \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]; \quad (11)$$

$$S_{u_{\varphi}} = \frac{\rho u_r u_{\varphi}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu_* \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_{\varphi}}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u_{\varphi} / r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right\} \quad (12)$$

$$S_{u_z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_* \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial z} \right) \right]; \quad (13)$$

Згідно із ітераційною схемою на першій ітерації відшукується розв'язання лінійної частини крайової задачі із початковими та межовими умовами (7),(8).

$$\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial t} = \frac{\gamma_{\Phi}}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial z^2} \right], \quad (14)$$

Застосування інтегральних перетворень до рівняння (14) із межовими умовами (8) та початковими умовами (7) дає розв'язання у вигляді

$$\begin{aligned} & \overline{\overline{\overline{\Phi}}}(\alpha_j^{\Phi}, \beta_{jk}^{\Phi}, \lambda_{jkl}^{\Phi}, p) = \\ & = \int_0^R J_k(\lambda_{jkl}^{\Phi} r) \int_0^{2\pi} \zeta_k(\beta_{jk}^{\Phi} \varphi) \int_0^H \sin(\alpha_j^{\Phi} z) \left[\frac{c_{jkl}^{\Phi} - R_{jkl}^{\Phi}}{p + \theta_{jkl}^{\Phi}} + \frac{R_{jkl}^{\Phi}}{p} \right] r dr d\varphi dz. \end{aligned} \quad (15)$$

У просторі оригіналів розв'язання у лінійному наближенні отримуємо у вигляді

$$\Phi^{(0)}(r, \varphi, z, t) = \sum_{jkl} J_k(\delta_{jkl}^{\Phi} r) \zeta_k(\beta_{jk}^{\Phi} \varphi) \sin(\alpha_j^{\Phi} z) \left[(c_{jkl}^{\Phi} - R_{jkl}^{\Phi}) e^{-\theta_{jkl}^{\Phi} t} + R_{jkl}^{\Phi} \right], \quad (16)$$

де $c_{j,k,l}^{\Phi}$ – значення інтегральних перетворень функцій $\mu_k(r, \varphi, z)$ (початкові умови), $R_{j,k,l}^{\Phi}$ – значення інтегральних перетворень межових умов (8), $\zeta_{2k-1}(\beta_{jk}^{\Phi} \varphi) = \frac{1}{\pi} \sin(\beta_{jk}^{\Phi} \varphi)$; $\zeta_{2k}(\beta_{jk}^{\Phi} \varphi) = \frac{1}{\pi} \cos(\beta_{jk}^{\Phi} \varphi)$.

У загальному випадку для задачі (1)-(8) (із урахуванням розв'язання (15)) можна записати розв'язання на m -й ітерації у вигляді

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\overline{\overline{\Phi}}}}^{(m)}(\alpha_j^{\Phi}, \beta_{j,k}^{\Phi}, \lambda_{j,k,l}^{\Phi}, p) &= \overline{\overline{\overline{\overline{\Phi}}}}^{(0)}(\alpha_j^{\Phi}, \beta_{j,k}^{\Phi}, \lambda_{j,k,l}^{\Phi}, p) + \\ &+ \frac{1}{p + \sigma_{j,k,l}^{\Phi}} L_t \left\{ \overline{\overline{\overline{\overline{N}}}}_{\Phi} \left[\overline{\overline{\overline{\overline{\Phi}}}}^{(m-1)}(r, \varphi, z, t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут p – оператор Ляпласа (інтегральне перетворення за часом). Подальші дії проілюструємо на прикладі функції

$$\begin{aligned} & N_{u_r} [u_r^{(0)}(r, \varphi, z, t), u_{\varphi}^{(0)}(r, \varphi, z, t), u_z^{(0)}(r, \varphi, z, t), T^{(0)}(r, \varphi, z, t)] = \\ &= \frac{u_{\varphi}^{(0)2}}{r} - R \frac{\partial T^{(0)}}{\partial r} + \\ &+ \frac{\mu_{*}}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r^{(0)2}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u_{\varphi}^{(0)}}{\partial r} / r \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial u_{\varphi}^{(0)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_z^{(0)}}{\partial z^2} \right] \\ &- \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(0)2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_r^{(0)} u_{\varphi}^{(0)})}{\partial \varphi} + \frac{\partial (u_r^{(0)} u_z^{(0)})}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Задача полягає у визначенні інтегральних перетворень від нелінійної частини $\overline{\overline{N}}^{u_r}$ рівняння (9), тобто від наведеного вище виразу із урахуванням отриманих розв'язань у лінійному наближенні $u_r^{(0)}(r, \varphi, z, t)$, $u_\varphi^{(0)}(r, \varphi, z, t)$, $u_z^{(0)}(r, \varphi, z, t)$, $T^{(0)}(r, \varphi, z, t)$.

В [3] викладено метод розв'язання системи нелінійних рівнянь, що описують рух закручених потоків у циліндричній камері циліндричної форми з метою визначення ступеню очистки повітряної суміші від твердих домішок (очистка повітря).

Щоб з'ясувати сутність проблем, які виникають при застосуванні скінченних інтегральних перетворень за просторовими змінними та перетворенням Лапласа за часовою змінною, запишемо вираз для конвективної складової рівняння (9). Маємо:

$$\begin{aligned}
 N_{cn}^{u_r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(0)^2}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_r^{(0)} u_\varphi^{(0)})}{\partial \varphi} + \frac{\partial (u_r^{(0)} u_z^{(0)})}{\partial z} = \\
 &= \frac{1}{r} \sum_{jkl} \frac{dJ_k(\delta_{jkl}^{u_r r})}{dr} \zeta_k^{u_r}(\beta_{jk}^{u_r} \varphi) \zeta_{k'}^{u_r}(\beta_{j'k'}^{u_r} \varphi) \times \\
 &\times \sin(\alpha_j^{u_r} z) \sin(\alpha_{j'}^{u_r} z) \left[(c_{jkl}^{u_r} - R_{jkl}^{u_r}) e^{-\sigma_{jkl}^{u_r} t} + R_{jkl}^{u_r} \right] \\
 &\quad \left[(c_{j'k'l'}^{u_r} - R_{j'k'l'}^{u_r}) e^{-\sigma_{j'k'l'}^{u_r} t} + R_{j'k'l'}^{u_r} \right] + \\
 &+ \frac{1}{r} \sum_{jkl} \frac{J_k(\delta_{jkl}^{u_r r}) J_{k'}(\delta_{j'k'l'}^{u_r r})}{d\varphi} \zeta_k^{u_r}(\beta_{jk}^{u_r} \varphi) \frac{d}{d\varphi} \zeta_{k'}^{u_\varphi}(\beta_{j'k'}^{u_\varphi} \varphi) \sin(\alpha_j^{u_r} z) \sin(\alpha_{j'}^{u_\varphi} z) \times \\
 &\times \left[(c_{jkl}^{u_r} - R_{jkl}^{u_r}) e^{-\sigma_{jkl}^{u_r} t} + R_{jkl}^{u_r} \right] \left[(c_{j'k'l'}^{u_\varphi} - R_{j'k'l'}^{u_\varphi}) e^{-\sigma_{j'k'l'}^{u_\varphi} t} + R_{j'k'l'}^{u_\varphi} \right] + \\
 &+ \sum_{jkl} \frac{J_k(\delta_{jkl}^{u_r r}) J_{k'}(\delta_{j'k'l'}^{u_r r})}{jkl} \zeta_k^{u_r}(\beta_{jk}^{u_r} \varphi) \zeta_{k'}^{u_r}(\beta_{j'k'}^{u_r} \varphi) \alpha_j^{u_r} \sin(\alpha_j^{u_r} z) \alpha_{j'}^{u_z} \cos(\alpha_{j'}^{u_z} z) \times \\
 &\times \left[(c_{jkl}^{u_r} - R_{jkl}^{u_r}) e^{-\sigma_{jkl}^{u_r} t} + R_{jkl}^{u_r} \right] \left[(c_{j'k'l'}^{u_z} - R_{j'k'l'}^{u_z}) e^{-\sigma_{j'k'l'}^{u_z} t} + R_{j'k'l'}^{u_z} \right]. \tag{19}
 \end{aligned}$$

Згідно із загальною схемою ітераційного процесу для пошуку розв'язання у другому наближенні треба застосувати до виразу (19) скінченні перетворення за просторовими змінними z, φ, r .

$$\begin{aligned}
 \overline{\overline{N}}_{cn}^{u_r}(\alpha_j, \beta_{jk}, \delta_{jkl}, t) &= \\
 &= \int_0^R J_k(\delta_{jkl} r) \zeta_k(\beta_{jk} \varphi) \sin(\alpha_j z) N_{cn}^{u_r}(r, \varphi, z, t) r dr d\varphi dz. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Вачимо, що виконання інтегрального перетворення за змінною t потребує обчислення інтегралу від добутку трьох функцій Бесселя або їх похідних. Відомо, що такі інтеграли не обчислюються у квадратурах. Числове інтегрування також не дає задовільного результату внаслідок того, що прагнення досягти принадну точність за рахунок збільшення кількості членів у степеневих рядах, а це, своєю чергою, призводить до значних арифметичних похибок. Тому виникає потреба у розробці алгоритму інтегрування, вільного від перелічених недоліків. У [6] запропоновано ефективний алгоритм вирішення цієї задачі, що ґрунтується на апроксимації функцій Бесселя дробово-раціональними виразами. Так, наприклад, функції Бесселя нульового та першого порядків апроксимуються такими дробово-раціональними виразами.

$$J_0(x) \approx \frac{679310 + 65794x}{179.3 + 16.79x + x^2} + \frac{-506130 - 79342x}{164.03 + 24.529x + x^2} + \frac{-154720 + 1310x}{220.11 + 0.2498x + x^2}; \quad (21)$$

$$J_1(x) \approx \frac{106790 + 16219x}{96.50 + 12.66x + x^2} + \frac{-78570 - 18245x}{88.504 + 18.057x + x^2} + \frac{-25687 - 296.6x}{117.88 + 1.0346x + x^2}.$$

Точність такого подання функцій Бесселя не менша за 0.0001 для будь-якого значення x .

Тоді обчислення інтегралів від добутку будь-якої кількості циліндричних функцій зводиться до інтегрування суми дробово-раціональних функцій другого степеню, що є стандартна процедура.

Інша проблема полягає у тому, що при обчисленні складових вигляду

$$f_1(t) = \sum_{jkl}^N \left[\left(c_{jkl}^{u_r} - R_{jkl}^{u_r} \right) e^{-\sigma_{jkl}^{u_r} t} + R_{jkl}^{u_r} \right] \left[\left(c_{j'k'l'}^{u_r} - R_{j'k'l'}^{u_r} \right) e^{-\sigma_{j'k'l'}^{u_r} t} + R_{j'k'l'}^{u_r} \right] \quad (22)$$

отримуємо суму N^3 складових трьох експонент від часу. Практично, цей факт (наприклад, за $N=10$ матимемо 4000 складових відносно експонент) практично унеможливорює автоматизацію (програмну) процесу розв'язання системи нелінійних нестационарних диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Застосуємо до функції $f_1(t)$ інтегральне перетворення за Лапласом і застосуємо до отриманого виразу алгоритм еквівалентного спрощення [7]. Отримаємо:

$$L_t \{f_1(t)\} = L_t \left\{ \sum_{jkl}^N \left[\sum_{i=0}^3 a_i e^{-b_i t} \right] \right\} = .$$

$$= \sum_{jkl}^N \left[\frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p + b_1} + \frac{a_2}{p + b_2} + \frac{a_3}{p + b_3} \right] \approx \frac{d_0}{p} + \frac{d_1 + d_2 p}{c_1 + c_2 p + p^2} \quad (23)$$

У просторі оригіналів цьому виразу відповідає вираз

$$\hat{f}_1(t) = g_0^1 + e^{-\alpha^1 t} (g_1^1 \sin(\omega^1 t) + g_2^1 \cos(\omega^1 t)).$$

На рис. 2 наведені графіки вихідної суми та результат апроксимації.

Застосування цього алгоритму та обчислення інтегральних перетворень до виразу (19) (тобто реалізація (20)) дає змогу записати (20) у такому вигляді.

$$L_t \left\{ \overline{\overline{N}}_{cn}^{u_r} (\alpha_j, \beta_{jk}, \delta_{jkl}, t) \right\} = \sum_{nms}^N \left[\frac{cn_0^{nms}}{p} + \frac{cn_1^{nms} + cn_2^{nms} p}{cn_3^{nms} + cn_4^{nms} p + p^2} \right].$$

Коефіцієнти cn_i^{nms} залежать від значень інтегралів за відповідними змінними.

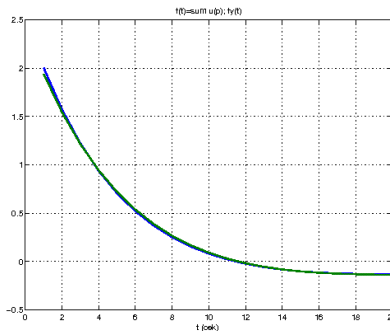


Рис. 2 – Графіки суми функцій часу і апроксимуючого поліному

Якщо застосувати цей алгоритм спрощення до решти складових у виразі (18), отримаємо розв'язання першого рівняння системи (9) із урахуванням (10) на другій ітерації у такому вигляді.

$$U_r^{(1)}(r, \varphi, z, p) = U_r^{(0)}(r, \varphi, z, p) + \sum_{nms}^N J_m (\delta_{nms}^{u_r} r) \zeta_k (\beta_{ms}^{u_r} \varphi) \sin(\alpha_s^{u_r} z) \times$$

$$\times \frac{1}{p + \sigma_{nms}^{u_r}} \left[\frac{cn_0^{nms}}{p} + \frac{cn_1^{nms} + cn_2^{nms} p}{cn_3^{nms} + cn_4^{nms} p + p^2} \right]$$

У просторі оригіналів розв'язання набуває вигляд

$$u_r^{(1)}(r, \varphi, z, t) = \sum_{nms}^N J_m(\delta_{nms}^{ur} r) \zeta_k(\beta_{ms}^{ur} \varphi) \sin(\alpha_s^{ur} z) \times \\ \times [ur1_{nms}^{(0)} e^{-\sigma_{nms}^{ur} t} + ur0_{nms}^{(1)} + e^{-\theta_{nms}^{(1)} t} (ur1_{nms}^{(1)} \sin \xi_{nms}^{(1)} t + ur2_{nms}^{(1)} \cos \xi_{nms}^{(1)} t)]$$

Якщо застосувати викладені алгоритми до решти рівнянь системи (9),(10) відносно шуканих змінних (вектор Φ), отримаємо вирази, аналогічні наведеному із відповідними коефіцієнтами та власними функціями і значеннями. Кількість ітерацій для досягнення принадної точності ($\Delta = 0.01$) для різних змінних системи коливається від 3 до 5. Для прикладу, наведемо графіки осьової складової швидкості

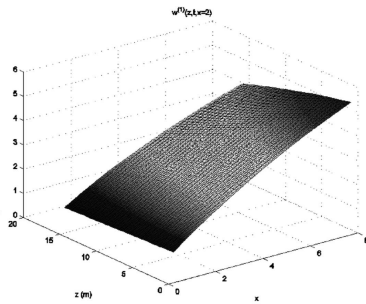


Рисунок 3. - Осьова складова швидкості на першій ітерації

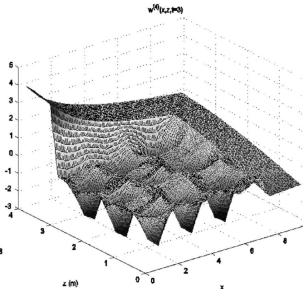


Рисунок 4. - Осьова складова швидкості на третій ітерації

Висновки

Застосування ітераційного числово-аналітичного методу для розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь руху газоповітряної суміші, тиску і температурного поля надає можливість суттєво зменшити час моделювання цих процесів із досягненням принадної точності розв'язання.

Подальші дослідження пов'язані із пошуком розв'язань системи рівнянь (9),(10) із урахуванням турбулентних складових цієї системи у вигляді (11). При цьому алгоритми інтегральних перетворень щодо просторових змінних залишаються тими самими, а алгоритми, що пов'язані із перетвореннями за часовими змінними розробляються для кожної із невідомих змінних.

Час реалізації викладених алгоритмів програмними засобами вимірюється кількома секундами, що на кілька порядків менше у випадку, якщо реалізація розв'язання системи рівнянь (9)—(11) виконується шляхом апроксимації цих рівнянь різницевиими схемами.

Суттєві переваги запропонованих алгоритмів полягають у тому, що отримані вирази у аналітичному вигляді надають можливість вирішувати задачі управління вхідними потоками у циклонні камери з метою оптимізації розділення сумішей на виході із циклонних камер.

Список використаної літератури

1. Аэродинамика и тепломассообмен в ограниченных вихревых потоках./ Кутателадзе С.С., Волчков Э.Т., Терехов В.И. // Новосибирск, 1987.—283 с.
2. Аэродинамика циклонно-вихревых камер./ Штым А.Н. //Владивосток, Изд-во Дальневосточного унив.,1985.—200 с.
3. Комп'ютерне моделювання динаміки повітряних потоків у циклонних камерах/Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М., Бовсуновська К.С//Адаптивні системи автоматичного управління. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.-Вип.21.-Дніпропетровськ, 2012.-С. 132—145
4. Закрученные потоки/ Гупта А., Лилли Д., Сайред Н// М.: Мир, 1987. – 589 с.
5. Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил. Том 3.—Закрученные потоки./ Халатов А.А., Авраменко А.А., Шевчук И.В. //Институт техн. теплофизики НАНУ, 2000.—474 с.
6. Ітераційний метод розв'язання нелінійних крайових задач. /Зеленський К.Х. //Наукові нотатки Луцького національного університету, №26, т, 2—2010—С.49—55.
7. Комп'ютерні методи прикладної математики/ Зеленський К.Х., Ігнатенко В.М., Коц О.П.//Київ, Академперіодика, 2002—480 с.

Отримано 15.09.2014 р.