

ДО ВИЗНАЧЕННЯ СТРУКТУРИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ГІДРОДИНАМІКИ

Анотація: Розглядається задача еквівалентного спрощення виразів, що отримуються при розв'язанні системи квазілінійних рівнянь Нав'є—Стокса. Запропоновано алгоритм спрощення, що ґрунтується на використанні теорії ланцюгових дробів.

Ключові слова: інтегральні перетворення, ітераційна схема, конвективно-дифузійний перенос, ланцюгові дроби, рівняння Нав'є-Стокса.

У результаті застосування числово-аналітичного методу розв'язання нелінійних рівнянь із частинними похідними [1] до розв'язання системи рівнянь гідродинаміки (рівнянь Нав'є—Стокса) [2] отримують розв'язання для компонент швидкості руху субстанції $u = [u_x, u_y, u_z]$ (рідинне або газове середовище) у такому вигляді (на першій ітерації):

$$u_x^{(1)}(x, y, z, t) = u_x^{(0)}(x, y, z, t) + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} X_i(\alpha_i, x) Y_j(\beta_{i,j}, y) Z_k(\gamma_{i,j,k}, z) \left[U1_{i,j,k}^{(1)} + U2_{i,j,k}^{(1)} \right] e^{-\delta_{i,j,k} t}. \quad (1)$$

Згідно загальної схеми ітераційного процесу лінійна частина розв'язання системи нестационарних рівнянь гідродинаміки, яка містить і рівняння Нав'є—Стокса, може бути подана у вигляді ряду:

$$u_x^{(0)}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} X_{u_x}(\alpha_i, x) Y_{u_x}(\beta_{i,j}, y) Z_{u_x}(\gamma_{i,j,k}, z) \left[U1_{i,j,k}^{(0)} + U2_{i,j,k}^{(0)} \right] e^{-\delta_{i,j,k} t}. \quad (2)$$

Тут $X_{u_x}(\alpha_i, x)$, $Y_{u_x}(\beta_{i,j}, y)$, $Z_{u_x}(\gamma_{i,j,k}, z)$ – власні функції лінійної частини крайової задачі на власні значення і функції стосовно компоненти швидкості u_x [3]. Числа N_x , N_y , N_z визначають кількість членів ряду, що враховуються у розв'язанні з погляду на потрібну точність розв'язання. Величини $U1_{i,j,k}^{(0)}$, $U2_{i,j,k}^{(0)}$ визначаються початковими і межовими умовами відповідної крайової задачі, що підпорядковуються відповідним інтегральним перетворенням.

Аналогічно можна записати розв'язання лінійної частини відносно компонент швидкості u_y , u_z :

$$u_y^{(0)}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} X_{u_y}(\alpha_i, x) Y_{u_y}(\beta_{i,j}, y) Z_{u_y}(\gamma_{i,j,k}, z) \left[V1_{i,j,k}^{(0)} + V2_{i,j,k}^{(0)} \right] e^{-\delta_{i,j,k}t} \quad (3)$$

$$u_z^{(0)}(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} X_{u_z}(\alpha_i, x) Y_{u_z}(\beta_{i,j}, y) Z_{u_z}(\gamma_{i,j,k}, z) \left[W1_{i,j,k}^{(0)} + W2_{i,j,k}^{(0)} \right] e^{-\delta_{i,j,k}t} \quad (4)$$

Наступний етап полягає обчисленні інтегральних перетворень від добутку шуканих функцій у конвективній частині квазілінійних рівнянь Нав'є–Стокса – $u_x \partial u_x / \partial x$, $u_y \partial u_x / \partial y$, $u_z \partial u_x / \partial z$ у першому рівнянні, $u_x \partial u_y / \partial x$, $u_y \partial u_y / \partial y$, $u_z \partial u_y / \partial z$ – у другому та $u_x \partial u_z / \partial x$, $u_y \partial u_z / \partial y$, $u_z \partial u_z / \partial z$ у третьому рівнянні системи. Те саме стосується й рівняння відносно температури потоку рідини або газу.

Добуток виразів типу (2), (3) і застосування інтегральних перетворень за просторовими змінними дає вираз вигляду

$$\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} \sum_{n=1}^{N_z} U3_{i,j,k} e^{-\delta_{i,j,k}t} V3_{l,m,n} e^{-\delta_{l,m,n}t} \quad (5)$$

Виконання подальших ітерацій кожного разу призводить до подвоєння сум відносно часової змінної, що фактично унеможлиблює подальше використання такого вигляду виразів.

У зв'язку з цим у роботі вирішується проблема еквівалентного спрощення виразів вигляду (5) таким чином, щоб уніфікувати отримані розв'язання з метою їхнього подальшого використання для розв'язання квазілінійної системи рівнянь Нав'є–Стокса.

У роботі пропонується алгоритм еквівалентного спрощення, що ґрунтується на застосуванні апарату ланцюгових дробів [3].

Застосуємо до виразу (5) інтегральне перетворення за Лапласом. Маємо

$$\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} \sum_{n=1}^{N_z} \frac{R_{i,j,k,l,m,n}}{p + \delta_{i,j,k} + \delta_{l,m,n}} \quad (6)$$

Розглянемо спочатку часткову суму вигляду

$$Y(p) = \sum_{n=1}^N \frac{R_n}{p + \delta_n} \quad (7)$$

Подано її у вигляді дробово-раціональної функції

$$Y(p) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n p^n}{\sum_{n=0}^N a_n p^n}. \quad (8)$$

Застосування алгоритму еквівалентного спрощення [3] дає можливість отримати замість (8) такий вираз:

$$Y(p) \approx \frac{b_0 + b_1 p}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}. \quad (9)$$

У просторі оригіналів цьому виразу відповідає

$$y(t) = e^{-\alpha t} [A\varphi_1(t) + B\varphi_2(t)], \quad (10)$$

де

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \cos \omega t, & \omega > 0 \\ \cosh \omega t, & \omega < 0. \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \sin \omega t, & \omega > 0 \\ \sinh \omega t, & \omega < 0. \end{cases}$$

Повторне застосування алгоритму (8)–(9) до решти складових ряду (5) дозволяє отримати вираз вигляду (10). Обґрунтування такого підходу – будь-яка система високого порядку наближено веде себе як система другого порядку із запізненням.

Отже,

$$\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} \sum_{n=1}^{N_z} U_{3_{i,j,k}} e^{-\delta_{x_{i,j,k}} t} V_{3_{l,m,n}} e^{-\delta_{i,j,k} t} \approx \approx e^{-\alpha t} [A\varphi_1(t) + B\varphi_2(t)]. \quad (11)$$

Тоді розв'язання, наприклад, першого рівняння (1) системи квазілінійних рівнянь Нав'є–Стокса можна наближено подати у вигляді функції

$$u_x^{(1)}(x, y, z, t) = u_x^{(0)}(x, y, z, t)$$

$$\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \sum_{k=1}^{N_z} X_i(\alpha_i, x) Y_j(\beta_{i,j}, y) Z_k(\gamma_{i,j,k}, z) \times$$

$$\times e^{-\alpha_{i,j,k} t} [A_{i,j,k} \varphi_1(\omega_{i,j,k} t) + B_{i,j,k} \varphi_2(\omega_{i,j,k} t)]. \quad (12)$$

Похибки, що накопичуються за рахунок такої апроксимації, поперше, не є сутєві (рис. 1), по-друге, їх можна скопенсувати за рахунок додаткових ітерацій під час розв'язання системи рівнянь.

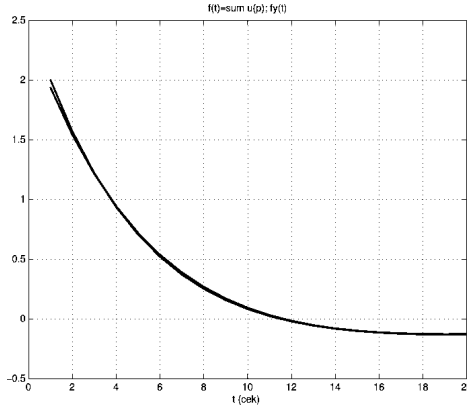


Рис. 1 – Похибки, що накопичуються за рахунок апроксимації

Наведений алгоритм може ефективно застосовуватися до розв'язання широкого класу нестационарних нелінійних рівнянь математичної фізики.

Список використаних джерел

1. Зеленський К.Х. Ітераційний метод розв'язання нелінійних крайових задач: наукові нотатки / К.Х. Зеленський. Міжв. збірник. Вип. 26.—Луцьк, ЛНТУ, 2009.—С.92—100.
2. Теплообмен и гидродинамика в полях цент
3. Халатов А. А. Робежных массовых сил. Том 3.— Закрученные потоки: / А. А. Халатов, А. А. Авраменко, И. В. Шевчук // Институт техн. теплофизики НАНУ, 2000. —474 с.
4. Зеленський К. Х. Комп'ютерні методи прикладної математики/ К.Х. Зеленський, В. М. Ігнатенко, О. П. Коц // К.: Наукова думка, 2002. — 480 с.

Отримано 20.04.2015 р.