УДК 681.5.015.24

Ю.И. Дорофеев

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРИ НАЛИЧИИ СТРУКТУРНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Аннотация: В статье предложен подход к решению задачи синтеза оптимального управления запасами для систем производства-хранения-распределения ресурсов в условиях действия неизвестного, но ограниченного внешнего спроса и наличия структурных ограничений на значения состояний и управляющих воздействий. На основании метода инвариантных эллипсоидов синтезирован закон управления в виде линейной нестационарной обратной связи с пропорционально-интегральным регулятором, использующим сигнал невязки между наличным и страховым уровнями запаса ресурсов. Применение техники линейных матричных неравенств позволило свести синтез управления к задачам одномерной выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: система управления запасами, метод инвариантных эллипсоидов, линейное матричное неравенство, задача полуопределенного программирования.

Введение

Задача управления запасами возникает в системах производства-хранения-распределения ресурсов, когда с целью удовлетворения потребительского спроса создаются запасы материальных ресурсов.

Управление запасами заключается в определении моментов времени и объемов заказов на их восполнение. Из всего многообразия моделей управления запасами можно выделить два основных типа [1]: модель оптимального размера заказа и модель периодической проверки. В первом случае предполагается непрерывный контроль за состояние запасов и размещение заказов фиксированного размера в моменты времени, определяемые в соответствии с выбранной стратегий. Второй тип модели предполагает проверку уровня запасов через равные промежутки времени и размещение заказа, размер которого определяется в соответствии с выбранной стратегией.

Совокупность правил, по которым принимаются подобные решения, называется стратегией управления запасами. Оптимальной стратегией является та, которая обеспечивает доставку необходимой продукции в нужном количестве нужному потребителю в нужное время при минимуме затрат.

Выбор модели управления запасами определяется характером спроса со стороны внешних потребителей. С точки зрения теории управления объемы спроса, поступающие из внешней среды, целесообразно рассматривать в качестве внешних возмущающих воздействий. В настоящее время для синтеза стратегии управления запасами с заданной моделью спроса широко применяется метод прогнозирующего управления [2].

Однако, на практике, как правило, отсутствует информация для построения адекватной модели внешнего спроса, которая необходима для синтеза прогнозирующего управления. Одним из подходов к решению задачи управления запасами в условиях неопределенности спроса является концепция “неизвестных, но ограниченных” воздействий [3]. При этом соответствующая модель спроса характеризуется интервальной неопределенностью.

Одним из наиболее эффективных подходов к решению задачи подавления ограниченных внешних возмущений является подход, основанный на концепции инвариантных множеств [4]. Среди различных форм инвариантных множеств особо выделяются эллипсоиды вследствие их простой структуры и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова.

В рамках метода инвариантных эллипсоидов [5] в качестве технического средства используется математический аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН). После того, как были развиты вычислительные методы, основанные на идеях выпуклой оптимизации, и для их реализации были разработаны соответствующие алгоритмы и программное обеспечение, ЛМН стали рассматриваться в качестве общего метода анализа и синтеза динамических систем при наличии ограничений как в непрерывном, так и в дискретном случае [6].

Основная идея синтеза регулятора с помощью ЛМН для заданного объекта управления состоит в следующем. Синтезируемый регулятор выбирается в классе линейных динамических обратных связей. Цель управления формулируется в виде неравенства относительно квадратичной функции Ляпунова замкнутой системы. Полученное неравенство представляется в виде ЛМН относительно неизвестной матрицы параметров регулятора. Заданные по условиям ограничения также представляются в виде ЛМН, содержащих матрицы, зависящие от исходных данных. Затем соответствующая задача выпуклой оптимизации решается численно. В результате находится матрица, определяющая функцию Ляпунова, на основании которой вычисляются параметры регулятора.

Однако в большинстве работ, посвященных решению рассматриваемой задачи, техника ЛМН применяется для синтеза регуляторов в условиях действия возмущений, ограниченных в какой-либо норме. Тогда как спецификой задач управления запасами является неотрицательность значений переменных, что приводит к наличию несимметричных ограничений как на значения внешнего спроса, так и значения состояний и управляющих воздействий.

Постановка задачи

Рассмотрим динамическую сетевую модель системы управления запасами, к которым относятся производственные, финансовые, информационные системы, системы снабжения и другие. Узлы сети задают виды и размеры управляемых запасов, а дуги – управляемые и неуправляемые потоки в сети. Управляемые потоки описывают процессы переработки и перераспределения ресурсов между узлами сети и процессы поставок сырья извне. Неуправляемые потоки описывают спрос на ресурсы, который формируется внешними потребителями.

Для математического описания системы управления запасами (СУЗ) с периодической проверкой уровня запасов и мгновенными поставками (в течение одного периода) используется дискретная модель в пространстве состояний, поскольку предполагается, что получение информации о состоянии сети и формирование управляющих воздействий происходит в дискретные моменты времени с заданным периодом дискретизации Δt. Уравнения модели описывают изменение уровня запасов каждого вида ресурсов с течением времени. В качестве переменных состояний рассматриваются наличные уровни запаса ресурсов. Управляющими воздействиями являются объемы заявок на поставку ресурсов, формируемые узлами сети в текущем периоде, а внешними возмущениями выступают объемы спроса на ресурсы, которые поступают извне.

Предполагается, что структура сети известна, состояния доступны непосредственному измерению, а значения временных интервалов, определяющих длительность транспортировки и переработки ресурсов в узлах сети, известны и кратны выбранному периоду дискретизации. Тогда математическая модель СУЗ задается разностным уравнением:

$$x(k+1) = x(k) + Bu(k) + Wd(k), \tag{1}$$

где $k = 0, 1, \ldots$ – номер дискретного интервала; $x(k) \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояний; $u(k) \in \mathbf{R}^m$ – вектор управляющих воздействий; $d(k) \in \mathbf{R}^q$ – вектор внешних возмущений; $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $W \in \mathbf{R}^{n\times q}$ – матрицы влияния управлений и возмущений, соответственно, методика построения которых изложена в работе [7].

В процессе функционирования СУЗ должны выполняться следующие ограничения:

$$x(k) \in X = \left\{x \in \mathbf{R}^n :\ 0 \leqslant x \leqslant x^{\max}\right\}, \tag{2}$$

$$u(k) \in U = \left\{u \in \mathbf{R}^m :\ 0 \leqslant u \leqslant u^{\max}\right\},$$

где векторы $x^{\max}$ и $u^{\max}$, определяющие максимальные вместимости хранилищ узлов сети и максимальные объемы транспортировок, считаются заданными.

Будем предполагать, что векторы внешних возмущений удовлетворяют ограничениям:

$$d(k) \in D = \left\{ d \in \mathbf{R}^q : \ 0 \leqslant d^{\min} \leqslant d \leqslant d^{\max} \right\},$$

где векторы $d^{\min}$ и $d^{\max}$ определяют граничные значения спроса и предполагаются известными.

Для системы (1) рассматривается задача синтеза робастной по отношению к неизвестному, но ограниченному внешнему спросу стратегии управления запасами, которая для любого начального состояния $x(0) \in X$ и спроса $d(k) \in D \ \forall k \geqslant 0$ обеспечивает: 1) полное и своевременное удовлетворение спроса; 2) оптимизацию критерия качества работы системы; 3) асимптотическую робастную устойчивость замкнутой системы при ограничениях (2).

Представление задачи в терминах ЛМН

Первым этапом решения задачи является аппроксимация множества D значений внешнего спроса эллипсоидом наименьшего объема:

$$E(d_c,\ P_d) = \left\{ d \in \mathbf{R}^q : (d(k) - d_c)^T P_d^{-1} (d(k) - d_c) \leqslant 1 \right\}, \qquad (3)$$

матрица которого P_d и вектор d_c, задающий координаты центра, определяются в результате решения задачи выпуклой оптимизации:

$$-\log\det E \to \min \qquad (4)$$

при ограничениях на матричную $E = E^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{q \times q}$ и векторную $d \in \mathbf{R}^q$ переменные:

$$E \succ 0, \ \begin{bmatrix} 1 & (Ed_i - d)^{\mathrm{T}} \\ Ed_i - d & I \end{bmatrix} \succeq 0, \ i = \overline{1, q^2},$$

где d_i – векторы, элементы которых содержат все возможные комбинации значений векторов $d^{\min}$ и $d^{\max}$, задающих граничные значения спроса.

Решение задачи (4) $\hat{E},\ \hat{d}$ определяет параметры аппроксимирующего эллипсоида (3):

$$P_d = \hat{E}^{-2}, \quad d_c = \hat{E}^{-1}\hat{d}.$$

Будем строить закон управления в виде линейной нестационарной обратной связи с пропорционально-интегральным (ПИ) регулятором, использующим сигнал рассогласования между наличным и страховым уровнями запаса. Для этого введем вектор $x^* \in \mathbf{R}^n$, элементы которого определяют размеры страховых запасов узлов сети

 ISSN 1560-8956

и вычисляются на основании средних значений внешнего спроса с помощью продуктивной модели Леонтьева:

$$x^* = (I - \Pi)^{-1}\, d^{\text{mean}},\ d_j^{\text{mean}} = \begin{cases} \frac{q}{2}(d_j^{\max} + d_j^{\min}), & j = \overline{1, q}, \\ 0, & j = \overline{q+1, n}, \end{cases} \quad (5)$$

где Π – технологическая матрица, значение элемента (i, j) которой равно количеству единиц ресурса i, необходимого для производства единицы ресурса j.

Если для аппроксимации непрерывного интеграла используется метод прямоугольников, то в дискретном виде ПИ-закон управления можно представить следующим образом [8]:

$$u(k) = k_P\,(x(k) - x^*) + k_I z(k),\ z(k) = \Delta t \sum_{i=0}^{k-1} (x(i) - x^*),$$

где k_P, k_I – коэффициенты передачи пропорциональной и интегральной части регулятора, соответственно.

Для практической реализации закона управления более удобным является рекуррентный алгоритм. Он характеризуется тем, что для вычисления текущего значения управляющего воздействия $u(k)$ используется его предыдущее значение $u(k-1)$ и величина поправки:

$$u(k) = u(k-1) + K_0(k)\,(x(k) - x^*) + K_1(k)\,(x(k-1) - x^*)\,, \quad (6)$$

где $K_0(k)$, $K_1(k) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ – матрицы коэффициентов обратной связи в момент времени k.

Введем составной вектор $v(k) = \left[(x(k) - x^*)^{\mathrm{T}},\ (x(k-1) - x^*)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ и перепишем закон управления (6) в виде:

$$u(k) = u(k-1) + F(k)v(k),\ F(k) = [K_0(k)\ K_1(k)]\,. \quad (7)$$

Тогда модель замкнутой СУЗ для управления (7) можно представить в виде:

$$x(k+1) = (Z + BF(k))\,v(k) + x^* + Bu(k-1) + W\,(d(k) - d_c) + W d_c, \quad (8)$$

где блочная матрица $Z \in \mathbf{R}^{n \times 2n}$ равна $Z = [I_{n \times n}\ 0_{n \times n}]$.

Синтез стабилизирующих алгоритмов управления, как правило, основывается на оценивании верхнего граничного значения критерия качества с помощью квадратичной функции Ляпунова, построенной на решениях системы. Запишем критерий качества в случае бесконечного временного горизонта:

$$J_\infty(k) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \Big((x(k) - x^*)^{\mathrm{T}} R_x\,(x(k) - x^*) + u^{\mathrm{T}}(k) R_u u(k) + \Delta u^{\mathrm{T}}(k) R_\Delta \Delta u(k) \Big)\,, \quad (9)$$

где $R_x \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $R_u \in \mathbf{R}^{m\times m}$, $R_\Delta \in \mathbf{R}^{m\times m}$ – положительно определенные диагональные весовые матрицы; $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$. Первое слагаемое в выражении (9) определяет размеры штрафов за отклонение наличных уровней запаса ресурсов от страховых, второе – стоимость производства и транспортировки ресурсов, третье – вводится для обеспечения эффекта сглаживания скачков управляющих воздействий.

Задача синтеза оптимального управления сводится к решению минимаксной задачи:

$$u(k) = \arg \min_{u(k)\in U} \big(\max_{d(k)\in E(d_c, P_d)} J_\infty(k) \big). \tag{10}$$

Определим квадратичную функцию Ляпунова, построенную на решениях системы (8):

$$\begin{array}{l} V\left(x(k) - x^*\right) = \left(x(k) - x^*\right)^{\mathrm{T}} P(k) \left(x(k) - x^*\right), \\ P(k) = P^{\mathrm{T}}(k) \in \mathbf{R}^{n\times n},\ P(k) \succ 0. \end{array} \tag{11}$$

Вычислим первую разность по k функции Ляпунова (11) в силу системы (8) и потребуем, чтобы $\forall k \geqslant 0$ выполнялось неравенство, которое гарантирует асимптотическую устойчивость замкнутой системы:

$$V\left(x(k+1) - x^*\right) - V\left(x(k) - x^*\right) \leqslant -J_\infty(k). \tag{12}$$

Если последнее неравенство выполняется, то следуя [9], можно показать, что функция Ляпунова (11) $\forall k \geqslant 0$ определяет верхнее граничное значение критерия (9):

$$\max_{d(k)\in E(d_c, P_d)} J_\infty(k) \leqslant V\left(x(k) - x^*\right). \tag{13}$$

Тогда, в соответствии с (13), задача (10) эквивалентна задаче минимизации функции Ляпунова

$$u(k) = \arg \min_{u(k)\in U} V\left(x(k) - x^*\right),$$

которая, в свою очередь, эквивалентна задаче вычисления минимального скалярного значения $\gamma(k) > 0$ такого, что $\forall k \geqslant 0$ выполняется:

$$\left(x(k) - x^*\right)^{\mathrm{T}} P(k) \left(x(k) - x^*\right) \leqslant \gamma(k).$$

В соответствии с [9] введем матричную переменную

$$Q(k) = \gamma(k) P^{-1}(k) \tag{14}$$

и получим эквивалентную задачу:

$$\begin{array}{c} \gamma(k) \to \min\limits_{Q(k)} \\ \gamma(k) > 0,\ \left(x(k) - x^*\right)^{\mathrm{T}} Q^{-1}(k) \left(x(k) - x^*\right) \leqslant 1, \end{array} \tag{15}$$

 ISSN 1560-8956

которую можно трактовать как задачу минимизации по критерию следа инвариантного эллипсоида для системы (8). С помощью леммы Шура [10] нестрогое неравенство в (15) представим в виде двух ЛМН и получим задачу полуопределенного программирования (ПОП):

$$\begin{gathered}\gamma(k) \to \min_{Q(k)} \\ \gamma(k) > 0,\ Q(k) \succ 0,\ \begin{bmatrix} 1 & (x(k)-x^*)^{\mathrm{T}} \\ (x(k)-x^*) & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Следуя [9], введем матричную переменную $Y(k) \in \mathbf{R}^{m\times 2n}$:

$$Y(k) = F(k)\cdot \text{block diag}\left(Q(k), Q(k)\right). \tag{17}$$

Используя S-процедуру [10] неравенство (12), гарантирующее убывание с течением времени значения функции Ляпунова (11), и неравенство (3), описывающее эллипсоид, аппроксимирующий множество D значений внешних воздействий, представим в виде ЛМН, используя методику, изложенную в работе [11]:

$$\begin{bmatrix} \text{block diag}\,(Q(k),0) & Y^{\mathrm{T}}(k)R_u & 0 & (Q(k)\mathbf{Z}+BY(k))^{\mathrm{T}} & 0 & \text{block diag}\left(Q(k)R_x^{\frac{1}{2}},0\right) & Y^{\mathrm{T}}(k)\left(R_u+R_\Delta\right)^{\frac{1}{2}} \\ R_uY(k) & \gamma(k)R_u & 0 & B^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ Q(k)Z+BY(k) & B & W & Q(k) & \gamma(k)WP_d^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma(k)P_d^{\frac{1}{2}}W^{\mathrm{T}} & \gamma(k)\alpha I & 0 & 0 \\ \text{block diag}\left(R_x^{\frac{1}{2}}Q(k),0\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(k)I & 0 \\ \left(R_u+R_\Delta\right)^{\frac{1}{2}}Y(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(k)I \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{18}$$

где $\alpha \geqslant 0$ – некоторый скаляр.

Рассмотрим ограничения на значения состояний и управляющих воздействий (2). Для того, чтобы первое из ограничений представить в виде ЛМН, выполним аппроксимацию множества X допустимых значений состояний эллипсоидом

$$E(x^*,P_x) = \left\{x\in \mathbf{R}^n:\ (x(k)-x^*)^{\mathrm{T}}P_x^{-1}(x(k)-x^*) \leqslant 1\right\}, \tag{19}$$

у которого вектор x^*, определяющий координаты центра, совпадает с вектором страховых запасов, а матрица эллипсоида P_x вычисляется на основании вектора $x^{\max}$, задающего граничные значения:

$$P_x = \text{diag}\left(\frac{1}{4}\left(\min\{x_1^*,\ x_1^{\max}-x_1^*\}\right)^2,\ldots,\frac{1}{4}\left(\min\{x_n^*,\ x_n^{\max}-x_n^*\}\right)^2\right).$$

В качестве оценки инвариантного множества достижимости замкнутой системы (8) выступает эллипсоид:

$$E(x^*,P(k)) = \left\{x\in \mathbf{R}^n:\ (x(k)-x^*)^{\mathrm{T}}P^{-1}(k)\,(x(k)-x^*) \leqslant 1\right\}. \tag{20}$$

Тогда для того, чтобы было верно первое из неравенств (2), необходимо, чтобы объем эллипсоида (20) не превосходил объема эллипсоида (19), что эквивалентно выполнению неравенства:

$$P(k) \leqslant P_x .$$

С учетом тождества (14) и с помощью леммы Шура последнее неравенство может быть представлено в виде ЛМН:

$$\begin{bmatrix} \gamma(k)P_x & \gamma(k)I \\ \gamma(k)I & Q(k) \end{bmatrix} \succeq 0. \tag{21}$$

Рассмотрим второе из ограничений (2) на управляющие воздействия, которое запишем в виде двух неравенств:

$$0 \leqslant u\left(k\right),\ u(k) \leqslant u^{\max}. \tag{22}$$

С учетом закона управления (7) и тождества (17) неравенства (22) представим как:

$$\begin{gathered} -u(k-1) \leqslant Y(k) \cdot \text{block diag}\left(Q^{-1}(k), Q^{-1}(k)\right) \cdot v(k), \\ Y(k) \cdot \text{block diag}\left(Q^{-1}(k), Q^{-1}(k)\right) \cdot v(k) \leqslant u^{\max} - u(k-1). \end{gathered} \tag{23}$$

Умножим слева каждое из неравенств (23) сначала на $Y^{+}(k)$, где “+” – псевдообращение Мура-Пенроуза, а затем на $v^{\mathrm{T}}(k)$, и с помощью леммы Шура представим в виде неравенств:

$$\begin{bmatrix} -v^{\mathrm{T}}(k)Y^{+}(k)u(k-1) & v^{\mathrm{T}}(k) \\ v(k) & \text{block diag}\left(Q(k), Q(k)\right) \end{bmatrix} \preceq 0.$$

$$\begin{bmatrix} v^{\mathrm{T}}(k)Y^{+}(k)\left(u^{\max} - u(k-1)\right) & v^{\mathrm{T}}(k) \\ v(k) & \text{block diag}\left(Q(k), Q(k)\right) \end{bmatrix} \succeq 0. \tag{24}$$

Чтобы сделать неравенства (24) линейными относительно $Y(k)$, умножим первое из неравенств слева на блочно-диагональную матрицу block diag $\left(u^{+}(k-1)Y(k), I_{2n\times 2n}\right)^{\mathrm{T}}$ и справа на block diag $\left(u^{+}(k-1)Y(k), I_{2n\times 2n}\right)$, а второе неравенство – слева на block diag $\left(\left(u^{\max} - u(k-1)\right)^{+} Y(k), I_{2n\times 2n}\right)^{\mathrm{T}}$ и справа на block diag $\left(\left(u^{\max} - u(k-1)\right)^{+} Y(k), I_{2n\times 2n}\right)$. В результате получим следующие ЛМН:

$$\begin{bmatrix} -Y^{\mathrm{T}}(k)\left(u^{+}(k-1)\right)^{\mathrm{T}} v^{\mathrm{T}}(k) & Y^{\mathrm{T}}(k)\left(u^{+}(k-1)\right)^{\mathrm{T}} v^{\mathrm{T}}(k) \\ v(k)u^{+}(k-1)Y(k) & \text{blockdiag}\left(Q(k), Q(k)\right) \end{bmatrix} \preceq 0,$$

$$\begin{bmatrix} Y^{\mathrm{T}}(k)\left(\left(u^{\max} - u(k-1)\right)^{+}\right)^{\mathrm{T}} v^{\mathrm{T}}(k) & Y^{\mathrm{T}}(k)\left(\left(u^{\max} - u(k-1)\right)^{+}\right)^{\mathrm{T}} v^{\mathrm{T}}(k) \\ v(k)\left(u^{\max} - u(k-1)\right)^{+} Y(k) & \text{block diag}\left(Q(k), Q(k)\right) \end{bmatrix} \succeq 0. \tag{25}$$

Таким образом, приходим к задаче минимизации линейной функции

$$\gamma(k) \to \min_{Q(k), Y(k), \alpha} \tag{26}$$

при ограничениях на матричные переменные $Q(k) = Q^{\mathrm{T}}(k) \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $Y(k) \in \mathbf{R}^{m \times 2n}$ и скалярные параметры α, $\gamma(k)$, которые представлены в виде ЛМН (16), (18), (21), (25). При фиксированном значении скаляра α указанная задача является задачей ПОП.

Если задача (26), которая представляет собой совокупность задачи одномерной выпуклой оптимизации по параметру α и задачи ПОП, имеет решение, то система (1), замкнутая с помощью закона управления (7), где нестационарные матрицы коэффициентов обратной связи вычисляются по формуле

$$[K_0(k)\ K_1(k)] = Y(k) \cdot \text{block diag}\left(Q^{-1}(k), Q^{-1}(k)\right) \tag{27}$$

для любого начального состояния $x(0) \in X$ и неопределенного, но ограниченного внешнего возмущения $d(k) \in E(d_c, P_d)$, является асимптотически робастно устойчивой при ограничениях (2).

Численный пример

В качестве примера рассмотрим модель производственной системы, состоящей из трех узлов, которая изучалась в работе [12]. Структура сети описывается графом $G = (\{1,2,3\},\ \{(2,1),(2,3),(3,1)\})$.

Представим управляемые потоки u_1 и u_3 в виде гипердуг, а также добавим поток u_2, который описывает поставки сырья извне (см. рис. 1). Дуги d_1, d_2, изображенные пунктирными линиями, представляют внешний спрос. Для каждого управляемого потока в круглых скобках указано количество единиц продукции Π_{ij}, которое требуется в соответствии с технологическим процессом. Специфика данной системы в том, что на узел 1 действует только внешний спрос; на узел 2 действует как внешний, так и внутренний спрос со стороны узлов 1 и 3; на узел 3 – только внутренний спрос со стороны узла 1.

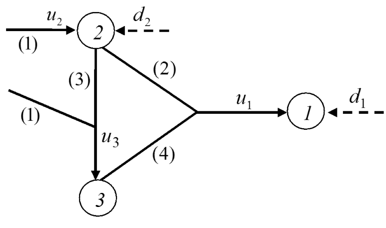


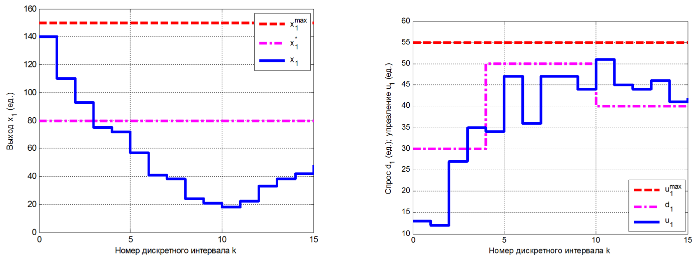
Рис. 1 – Графическое представление модели сети

Заданы максимальные вместительности хранилищ узлов сети $x^{\max} = [150\ , 2200, 500]^{\mathrm{T}}$, максимально возможные объемы транспортировок $u^{\max} = [55, 900, 220]^{\mathrm{T}}$, граничные значения внешнего спроса $d^{\min} = [30, 20]^{\mathrm{T}}$, $d^{\max} = [50, 40]^{\mathrm{T}}$, а также начальные условия $x(0) = [120\ , 800, 450]^{\mathrm{T}}$. По формуле (5) вычислим уровни страховых запасов узлов сети $x^* = [80,\ 1180, 320]^{\mathrm{T}}$.

В результате решения задачи (4) найдем параметры эллипсоида $E(d_c, P_d)$, аппроксимирующего множество D значений внешнего спроса: $P_d = \mathrm{diag}\,(84.5, 72.0)$, $d_c = [13.5, 12.0]^{\mathrm{T}}$.

Диагональные элементы весовых матриц выбраны равными $r_x = 1,0 \times 10^{-6}$, $r_u = 1,0 \times 10^{-8}$, $r_\Delta = 3,0 \times 10^{-7}$. Численное решение задачи получено с помощью свободно распространяемого пакета CVX for MATLAB [13]. Моделирование осуществлялось в течение 15 периодов. Результаты моделирования при $\alpha = 10$ и скачкообразно изменяющемся внешнем спросе представлены на рис. 2 – рис. 5, где *а* – значения наличного и страхового уровней запасов; *б* – значения внешнего спроса и управляющих воздействий.

Очевидно, что фазовая траектория замкнутой системы не выходит за пределы инвариантных эллипсоидов, размеры которых зависят от выбранных значений весовых матриц R_x, R_u и R_Δ.



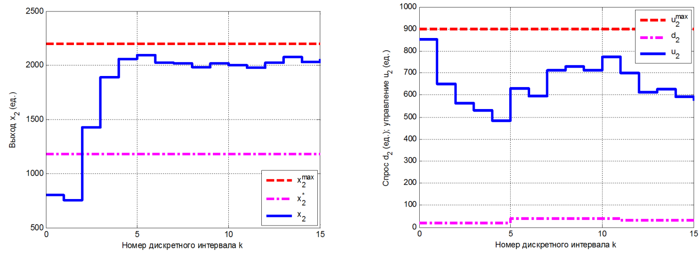
а *б*

Рис. 2 – Графики переходных процессов для узла 1 сети

Результаты моделирования показали, что полученная стратегия управления запасами обеспечивает полное и своевременное удовлетворение неопределенного, но ограниченного внешнего спроса при условии минимизации затрат, связанных с производством, транспортировкой и хранением ресурсов с учетом заданных структурных ограничений на состояния и управляющие воздействия.

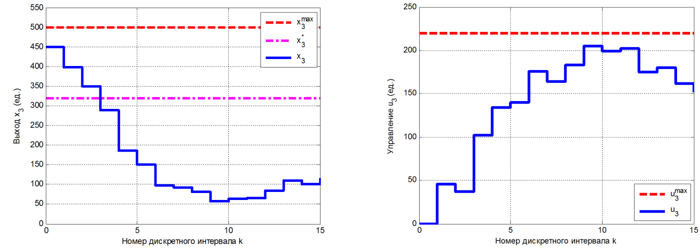
Выводы

В работе предложен подход к решению задачи синтеза оптимального управления запасами в условиях интервальной неопределенности внешнего спроса и наличия структурных ограничений. На основании метода инвариантных эллипсоидов синтезиро-



а *б*

Рис. 3 – Графики переходных процессов для узла 2 сети



а *б*

Рис. 4 – Графики переходных процессов для узла 3 сети

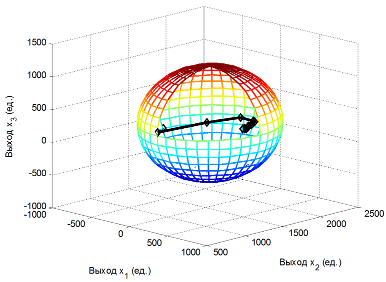


Рис. 5 – Фазовая траектория и инвариантный эллипсоид, полученный на последнем шаге

ван закон управления в виде линейной нестационарной обратной связи с пропорционально-интегральным регулятором, использующим сигнал невязки между наличным и страховым уровнями запаса. Применение техники линейных матричных неравенств позволило свести синтез управления к задачам одномерной выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования.

Полученное управление зависит от выбранного значения страхового уровня запасов, которое оказывает существенное влияние на величину управляющих воздействий и качество функционирования замкнутой системы. В рамках предложенного подхода возможен выбор оптимальных значений страховых запасов, поскольку полученное решение задачи синтеза управления задает, фактически, алгоритмическую зависимость между уровнем страховых запасов и оптимальным значением критерия качества.

Предложенный подход может быть применен для решения задач синтеза прогнозирующего управления запасами в случае, когда уровень страхового запаса не является постоянным и для его определения используется динамическая модель, с помощью которой осуществляется прогнозирование внешнего спроса.

Список использованных источников

1. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами / Ю.И. Рыжиков. – СПб: Питер, 2001. – 384 с.
2. Bemporad A. Robust model predictive control: a survey / A. Bemporad, M. Morari // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – 1999. – Vol. 245. – P. 207-226.
3. Bertsekas D.P. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty / D.P. Bertsekas, I. Rhodes // IEEE Trans. Automat. Control. – 1971. – Vol. 16. – P. 117–128.
4. Blanchini F. Set Theoretic Methods in Control / F. Blanchini, S. Miani. – Boston: Birkhauser, 2008. – 504 p.
5. Хлебников М.В. Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) / М.В. Хлебников, Б.Т. Поляк, В.М. Кунцевич // АиТ. – 2011. – № 11. – С. 9-59.
6. Баландин Д.В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д.В. Баландин, М.М. Коган. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.
7. Дорофеев Ю.И. Построение математических моделей управляемых сетей поставок с учетом запаздываний потоков / Ю.И. Дорофеев, А.А. Никульченко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 1. – С. 16-27.
8. Изерман Р. Цифровые системы управления / Р. Изерман. – М.: Мир, 1984. – 541 с.
9. Boyd S. Linear matrix inequalities in system and control theory / S. Boyd, E. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. – Philadelphia: SIAM, 1994. – 187 p.
10. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. – М.: Наука, 2002. – 303 с.

 ISSN 1560-8956

11. Дорофеев Ю.И. Робастное стабилизирующее управление запасами в сетях поставок в условиях неопределенности внешнего спроса и интервалов задержки пополнения запасов / Ю.И. Дорофеев, Л.М. Любчик, А.А. Никульченко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2014. – № 5. – С. 146-160.
12. Blanchini F. Least inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown inputs / F. Blanchini, F. Rinaldi, W. Ukovich // IEEE Trans. on robotics and automation. – 1997. – Vol. 13. – P. 633-645.
13. Grant M. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.0 beta / M. Grant, S. Boyd // URL: http://cvxr.com/cvx.

Отримано 24.04.2015 р.