УДК 621.924.229.86

А.Г. Кику, В.М. Бурлаков, О.И. Кику, С.В. Сазанова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРОВ В ЗАДАЧАХ КВАДРАТИЧНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Аннотация: В статье предложен метод определения параметров регуляторов для решения задач квадратичного оптимального управления состоянием линейных динамических объектов. Метод синтезирован непосредственно путем минимизации критерия качества по параметрам регулятора при известной структуре последнего. Предложенный метод позволяет свести порядок общей системы дифференциальных уравнений к размерности объекта управления, а также облегчить процесс выбора компромиссных решений задач синтеза алгоритмов управления, удовлетворяющих исходные требования Потребителя системы к качеству процесса управления и расходу энергии на управление.

Ключевые слова: объект управления, переменные состояния, алгоритм управления, критерий качества управления, оптимальный регулятор, дифференциальные уравнения, алгебраические уравнения, компромиссные решения.

Введение

В данной статье предложен метод решения задач квадратичного по переменным состояния объекта управления и к расходу энергии на управление. Суть метода состоит в определении оптимальных параметров алгоритма управления из условия минимума критерия качества после подстановки в него переменных состояния, найденных решением дифференциального уравнения объекта управления, в котором управление абстрактно выражается в виде линейной зависимости от переменных состояния. В результате таких подстановок критерий качества становится функционалом, зависящим от параметров алгоритма управления. Последнее позволяет определить оптимальные значения параметров алгоритма управления. Предложенный подход позволяет генерировать конструктивную процедуру определения компромиссных решений, удовлетворяющих исходные требования ПОТРЕБИТЕЛЯ системы к качеству процесса управления и к расходу энергии на управление. Метод позволяет решить задачу управления переменными состояния без необходимости формализации задачи в виде одного общего интегрального выражения. Метод позволяет также решить соответствующие задачи на условный экстремум. В статье приведен демонстрирующий пример предложенного подхода, позволяющего выявить суть и преимущества последнего.

Анализ методов оптимального квадратичного управления

Известно, что для решения задач квадратичного оптимального управления состоянием динамических объектов могут быть использованы как вариационные методы оптимального управления (метод классического вариационного исчисления и полувариационный принцип максимума Понтрягина), так и метод динамического программирования. Применение любых из названных методов для решения указанной задачи связано с необходимостью решения дифференциальных уравнений порядка 2n, где n – размерность объекта управления. Кроме этого, ввиду того, что, как правило, трудно выбрать параметры критерия качества, удовлетворяющих противоречивым требованиям ПОТРЕБИТЕЛЯ системы к переменным состояния объекта управления и расходу энергии на управление, в дальнейшем необходимо найти соответствующие компромиссные значения параметров критерия качества [1], на основе которых впоследствии окончательно определяются оптимальные значения параметров регуляторов.

Постановка задачи

В статье рассматривается задача управления состоянием одномерного по управлению объекта в следующей постановке:

$$u^*(x) = \arg\left\{ \min_u \int\limits_0^\infty \left(x^T Q x + r u^2 \right) dt \;\middle|\; \begin{array}{c} \dot{x} = Ax + Bu, \\ x(0) = x_0, \end{array} \right\} \tag{1}$$

где x – вектор переменных состояния, u – управляющее воздействие, Q – матрица, учитывающая требования к переменным состояния, r – параметр, учитывающий требования к расходу энергии на управление, A – матрица состояния объекта, B – матрица управления. При этом необходимо найти алгоритм замкнутого управления:

$$u^*(x) = K^* x, \tag{2}$$

обеспечивающий требования ПОТРЕБИТЕЛЯ системы к переменным состояния и расходу энергии на управление.

Решение указанной задачи может быть получено при помощи любого из трех вышеуказанных методов управления. Однако при этом, как было указано выше, при использовании вариационных методов неизбежно сталкиваемся с необходимостью решения систем дифференциальных уравнений порядка $2n$, где n – размерность вектора переменных состояния объекта управления. Действительно, в общем случае в процедурах указанных методов фигурируют n дифференциальных уравнений объекта упраления и n дифференциальных уравнений функций Лагранжа или Понтрягина.

В данной статье для сведения числа дифференциальных уравнений процедуры решения задачи (1) к размерности объекта управления предлагается подход, основанный на известной структуре алгоритма управления, а именно на ее линейности:

$$u^*(x) = -R^{-1}B^TK^*x, \tag{3}$$

что вытекает, например, из результата, полученного методом динамического программирования. В выражении (3) матрица K представляет собой матрицу Риккати алгоритма управления, которая определяется матричным дифференциальным уравнением:

$$K = -A^TK - KA + KBR^{-1}B^TK - Q. \tag{4}$$

При бесконечном времени управления уравнение (4) принимает следующий вид:

$$A^TK + KA - KBR^{-1}B^TK + Q = 0. \tag{5}$$

Процедура решения задачи на основе предложенного здесь подхода имеет следующий вид:

1. Алгоритм управления с учетом его линейности по переменным сосояния представляем в виде:
$$u(x) = Kx, \tag{6}$$
где матрица К имеет строчный вид $K = [k_1, \dots k_n]$.
2. Представленное в виде (6) управление подставляем в уравнение состояния объекта $\dot{x} = Ax + Bu$, после чего оно принимает однородный вид:
$$\dot{x} - (A - BK)\,x = 0. \tag{7}$$
3. Находим решение x векторно-матричной модели (7).
4. Подставляем найденное решение x в критерий качества рассмотренной задачи (1), в результате чего он принимает следующий вид:
$$I = \int\limits_0^\infty \left(x^TQx + ru^2\right)dt = \int\limits_0^\infty \left(x^TQx + ru^Tu\right)dt =$$
$$\int\limits_0^\infty \left(x^TQx + rx^TK^TKx\right)dt. \tag{8}$$
5. Определяем значение интегрального выражения (8), которое получится в виде функции от коэффициентов $k_1, \dots k_n$:
$$I = I(k_1, \dots k_n). \tag{9}$$

 ISSN 1560-8956

6. Оптимальные значения $k_1^*, \dots k_n^*$ коэффициентов $k_1, \dots k_n$ определяем из условия минимума найденного интеграла (9):

$$(k_1^*, \dots k_n^*) = \arg\left\{\min_{k_1, \dots k_n} I(k_1, \dots k_n)\right\} =$$

$$= \arg\left\{\frac{d}{dk_i} I(k_1, \dots k_n)\right\}, i = 1 \dots n. \tag{10}$$

Таким образом, процедура решения задачи оптимального управления (1) на основе предложенного подхода связана с решением n дифференциальных уравнений объекта управления (7), определением интеграла (8), решением n алгебраических уравнений (10), что, как правило, проще чем решение $2n$ дифференциальных уравнений, на основе которых в дальнейшем определяется алгоритм упраления.

Необходимо отметить, что приведенный подход, как и любые классические, позволяет получить окончательное решение задачи управления лишь в случае, когда задача ПОТРЕБИТЕЛЯ системы формализована адекватно. Однако такая ситуация практически не встречаются из-за трудности формализации исходных требований ПОТРЕБИТЕЛЯ к точности управления и к расходу энергии на управление в виде одного интегрального выражения, включающего матрицы Q и R критерия качества, структуры и параметры которых подлежат определению. Выбор их структур не представляет особой трудностью, так как на практике, как правило, эти матрицы имеют диагональный вид. Основная трудность связана с определением их коэффициентов и матриц Q и R. Это обусловлено тем, что требования к качеству переменных состояния управления и к расходу энергии на управление всегда являются противоречивыми. Так, например, требование уменьшения расхода энергии на управление неизбежно приведет к ухудшению качества переменных состояния, а требование к улучшению качества переменных состояния неизбежно приведет к увеличению расхода энергии на управление. Как правило, до решения задачи на формальном уровне компромиссное согласование указанных требований не может быть найдено самостоятельно ни ПОТРЕБИТЕЛЕМ системы, ни ее РАЗРАБОТЧИКОМ.

Окончательное решение задачи (1) может быть получено совместно ПОТРЕБИТЕЛЕМ системы и его РАЗРАБОТЧИКОМ после формального решения задачи. При использование существующих методов формальное решение позволяет выбрать коэффициенты матрицы алгоритма управления (4) или коэффициенты матриц Q и R критерия качества, на основе которых впоследствии определяются коэффициенты матрицы алгоритма управления, что и сделано в [1]. При использовании же предложенного подхода синтеза алгоритма управления компромиссное решение может быть получено без необходимости определения коэффициентов матриц Q и R критерия качества.

Некоторое облегчение определения компромиссного решения задачи управления, если оно с точки зрения ПОТРЕБИТЕЛЯ существует, может быть получено в случае, когда ПОТРЕБИТЕЬ может указать некоторые дополнительные ограничения в виде, например, ограничений на расход энергии на управление или на качество управления переменными состояния. В таких случаях задачи управления должны формализоваться в виде соответствующих задач на условный экстремум. Например, пусть ПОТРЕБИТЕЬ системы объявит ограничение на энергию управления $E \leqslant E_{доп}$. В этом случае формализованная постановка задача управления принимает следующий вид:

$$u^*(x) = \arg\left\{ \min_u \int_0^\infty \left(x^T Qx + ru^2\right) dt \;\middle|\; \begin{array}{c} \dot{x} = Ax + Bu, \\ x(0) = x_0, \\ E \leqslant E_{доп}. \end{array} \right\} \qquad (11)$$

При применении предложенного метода решения задачи управления выражение (11) приводится к виду:

$$u^*(x) = \arg\left\{ \min_u \int_0^\infty \left(x^T Qx\right) dt \;\middle|\; \begin{array}{c} \dot{x} = Ax + Bx^T K^T Kx, \\ x(0) = x_0, \\ \int_0^\infty x^T K^T Kx \leqslant E_{доп}. \end{array} \right\} \qquad (12)$$

Полученная задача в дальнейшем может быть решена предложенным методом. При этом, как вытекает из (6), коэффициенты алгоритма управления (2) определяются решением следующей алгебраической задачи на условный экстремум:

$$(k_1^*, \dots k_n^*) = \arg\left\{ \min_{k_1,\dots k_n} I(k_1, \dots k_n, x) \,|I_E(k_1, \dots k_n) \leqslant E_{доп} \right\}, \qquad (13)$$

где $I(k_1, \dots k_n, x) = \int\limits_0^\infty x^T Qx dt$, $I_E(k_1, \dots k_n) = \int\limits_0^\infty x^T K^T x dt$.

Как вытекает из приведенного, решение исходной задачи (11) на условный экстремум предложенным способом в общем случае проще, чем обычным.

Технологию решения задач квадратичного оптимального управления продемонстрируем на основе следующей задачи управления объекта первого порядка:

$$u^*(x) = \arg\left\{ \min_u \int_0^\infty \left(qx^2 + u^2\right) dt \;\middle|\; \begin{array}{c} \dot{x} + ax = bu, \\ x(0) = x_0, \\ x(\infty) = 0. \end{array} \right\} \qquad (14)$$

1. Представим алгоритм управления в виде:

$$u^* = kx. \tag{15}$$

1. Подставим (14) в дифференциальное уравнение объекта управления, в результате чего оно принимает следующий вид:

$$\dot{x} + ax = bu \rightarrow \dot{x} + ax = bkx \rightarrow \dot{x} + (a - bk)x = 0. \tag{16}$$

Как видно, после такой операции дифференциальное уравнение объекта становится однородным.

1. Определим решение уравнения (16):

$$x(t) = x_0 e^{(bk-a)t}. \tag{17}$$

1. Подставим (17) в критерий качества, в результате чего он принимает следующий вид:

$$I = \int\limits_0^\infty \left(qx^2 + u^2\right) dt = x_0^2 \int\limits_0^\infty \left(q + k^2 e^{2(bk-a)t}\right) dt. \tag{18}$$

1. Определим интеграл (18):

$$I = \frac{x_0^2(q + k^2)}{2(a - bk)} = I(k, a, b, x_0). \tag{19}$$

Из полученного выражения может быть найдено оптимальное значение коэффициента k усиления алгоритма управления (14) при известных параметрах a, b, q и начальных условий $x(0) = x_0$. Ниже приведены результаты решения задачи (14) при следующих значениях параметров: $a = 0,1,\ b = 1,\ q = 1,\ x_0 = 5$.

Оптимальный коэффициент усиления алгоритма управления равен $k^* = -0.905$ и совпадает с k^*, полученном методом динамического программирования.

Однако, как было указано выше, окончательное компромиссное решение задачи может быть получено совместно ПОТРЕБИТЕЛЕМ и РАЗРАБОТЧИКОМ системы. Это может быть осуществлено следующим образом. РАЗРАБОТЧИК системы представляет ПОТРЕБИТЕЛЮ зависимости частных показателей качества переменных состояния и расхода энергии на управление в виде выражений:

$$I_x = \int\limits_0^\infty x^2 dt = \frac{x_0^2}{2(a - bk)},\ I_u = \int\limits_0^\infty u^2 dt = \frac{k^2 x_0^2}{2(a - bk)}, \tag{20}$$

на основе которых ПОТРЕБИТЕЛЬ сам может выбрать устраивающий его коэффициент усиления алгоритма управления (15).

Для принятия окончательного решения ПОТРЕБИТЕЛЕМ удобнее будет, если ему выражения (20) будут совместно представлены в графическом виде. Это вытекает из приведенных результатов на Рис.1., где приведены зависимости часных критериев I_x и I_u от коэффициента усиления k алгоритма управления (2). Так допустимому расходу энергии на управление $I_{uд}$ соотвестсвует интеральная точность $I_{xд}$, которая достигается при условии, если коэффициент усиления алгоритма управления будет равным k^*. На основе Рис.1 может быть найден необходимый расход энергии для достижения требуемой точности $I_{xд}$. Отсутствие удовлетворяющего ПОТРЕБИТЕЛЯ решения означает, что он имеющимся объектом не может реализовать интересующий его процесс с требуемыми показателями качества. На Рис. 2 приведены графики переменной состояния и управления при полученном на Рис.1 коэффициенте усиления алгоритма управления k^*.

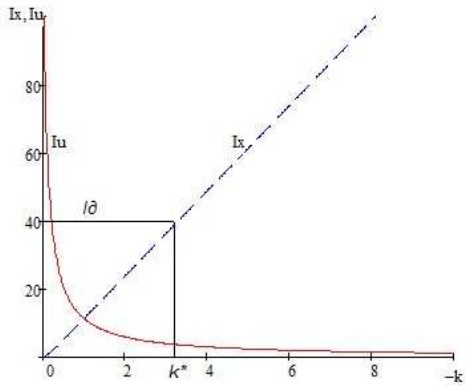

Рис. 1 – Графики зависимостей частных критериев I_x, I_u от коэффициента усиления k алгоритма управления

Из полученного вытекает важный вывод для РАЗРАБОТЧИКА истемы, а именно, что при предложенном походе оптимальное решение задачи инвариантно к параметрам матриц Q и R, что значительно упрощает ему выполнение этапа формализации задачи управления, а именно формализации требований ПОТРЕБИТЕЛЯ к качеству переменных состояния объекта управления и к расходу энергии на управление. Эти требования без ущерба качества решения задач интегрального квадратичного по переменным состояния и расходу энергии на управление могут быть формализованы в самом простом виде, а именно:

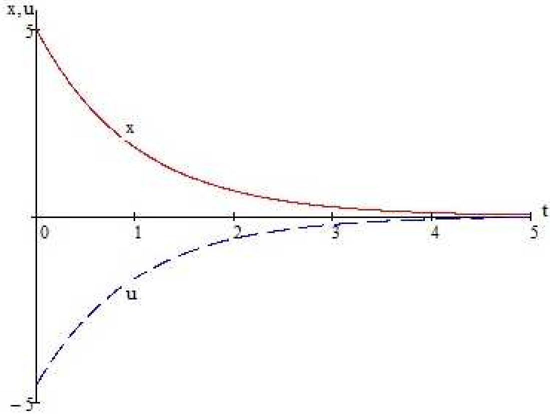

Рис. 2 – Графики переменной состояния и управления при допустимом расходе энергии и полученом коэффициенте усиления алгоритма управления

$$I_x = \int\limits_0^\infty x_i^2 dt,\ i = 1, \dots l,\ I_u = \int\limits_0^\infty u^2 dt. \tag{21}$$

После представления алгоритма управления в виде (6), его подставления в уравнении состояния объекта управления, интегрирования последнего, подставления переменных состояния в выражениях (21) последние становятся функциями от параметров $k_1, \dots k_n$ алгоритма управления, параметров матриц A, B уравнения состояния объекта управления и начальных условий, т.е.:

$$\begin{gathered} I_i = I_i(k_1, \dots k_n, a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_m, x_0), i = 1, \dots l, \\ I_u = I_u(k_1, \dots k_n, a_1, \dots a_n, b_1, \dots b_m, x_0). \end{gathered} \tag{22}$$

Компромиссные удовлетворяющие ПОТРЕБИТЕЛЯ системы, если они существуют, могут быть найдены на основе выражений (22), или на основе их графической интерпретации, или в виде согласования решений соответствующих задач на условный экстремум, в которых в качестве условий служит ограничение на расход энергии на управление.

В случае, если заранее известны параметры матрицы Q критерия качества, то оптимальные значения $k_1^*, \dots k_n^*$ параметров регулятора $k_1, \dots k_n$ определятся из условия минимума полученного критерия качества, т.е.:

$$(k_1^*, \dots k_n^*) = \arg\left\{\min_{k_1, \dots k_n} I(k_1, \dots k_n)\right\} = \arg\begin{bmatrix} \frac{d}{dk_1} I(k_1, \dots k_n) = 0, \\ \dots \\ \frac{d}{dk_n} I(k_1, \dots k_n) = 0. \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Выводы

1. Предложенный подход синтеза алгоритмов регуляторов для решения задач квадратичного по переменным состояния и расходу энергии позволяет в два раза уменьшить порядок общей системы дифференциальных уравнений стандартных процедур решения задач оптимального управления и свести его к размерности объекта управления.
2. Предложенный подход синтеза алгоритма интегрального квадратичного управления облегчает РАЗРАБОТЧИКУ системы выбрать структуру и параметры критерия качества при осуществлении формализованной постановки задачи управления.
3. Предложенный подход синтеза алгоритма интегрального квадратичного управления позволяет ПОТРЕБИТЕЛЮ системы выбрать параметры алгоритмы управления на основе абстрактных результатов, полученных ее РАЗРАБОТЧИКОМ.
4. При использовании косвенных, в том числе и квадратичных критериев качества, окончательные решения синтеза алгоритмов управления всегда являются компромиссными.
5. Компромиссные решения могут быть найдены только совместно ПОТРЕБИТЕЛЕМ системы и ее РАЗРАБОТЧИКОМ после полученных им абстрактных решений задач синтеза алгоритмов управления.
6. Предложенный метод позволяет паспортизировать объект с точки зрения достижимых показателей качества управляемости.

Список литературы

1. Кику А.Г., Шейко В.Ю. Выбор параметров квадратичных критериев в задачах оптимального управления линейными объектами. / А.Г. Кику, В.Ю. Шейко // Межведомственный научно-технический сборник “Адаптивные системы автоматического управления”. – 2012. – № 20(40).

Отримано 21.04.2015 р.