УДК 681.51

А.А. Стенин, В.П. Пасько, Е.Ю. Мелкумян, М.А. Солдатова

АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Аннотация: В данной статье проведен анализ проблемы синтеза систем управления нелинейными объектами. Для поиска стабилизирующих управлений с заданными динамическими свойствами переходных процессов в таких объектах предложено использовать метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР), который при корректном выборе сопровождающего функционала позволяет существенно упростить задачу оптимизации путем сведения ее к стандартной процедуре известного метода АКОР. Этот факт в статье иллюстрируется практическим примером. В основе метода АКАР лежит главный принцип синергетики – принцип подчинения.

Ключевые слова: нелинейный объект, АКОР, аттрактор, сопровождающий функционал, устойчивость, стабилизируемость, динамические свойства.

Введение

Справедливость принципа суперпозиции для линейных систем управления позволила разработать настолько общие и эффективные методы решения этих систем, что исследователи нелинейных систем во многих работах начали прибегать к “повальной” линеаризации, что зачастую приводит к искажению действительной картины управления. В этой связи возникает насущная потребность рассмотреть задачу управления как исходно нелинейную проблему. Проблема синтеза систем управления нелинейными объектами в отличие от линейных несравненно более сложная и ей посвящено незначительное число работ, в частности [1,2]. Нелинейность реальных систем во многом определяется ограниченностью энергии и мощности процессов, протекающих в объектах различной физической природы, наличием механических, электрических и тепловых ограничений, насыщения и т.д. Учет этих ограничений в настоящее время становится обязательным в связи с требованиями интенсификации технологических процессов, когда рабочие режимы промышленных агрегатов и различных подвижных объектов становятся близкими к предельно допустимым. Несправедливость принципа суперпозиции для нелинейных дифференциальных уравнений чрезвычайно затрудняет анализ и особенно синтез нелинейных систем управления. В частности, в линейно-квадратичных задачах аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) структура закона управления линейным объектом заранее предопределена и процедура синтеза сводится к вычислению его параметров, Для нелинейных же объектов структура законов оптимального управления вообще неизвестна и поэтому целесообразен поиск этих законов через соответствующий функционал, т.е. в нелинейных задачах управления теория АКОР выступает, в первую очередь, как направляющая структурно-параметрическая концепция в разработке методов синтеза нелинейных оптимальных систем. Этому вопросу посвящен целый ряд работ [1-17]. Применение метода АКОР для нелинейных объектов сводит задачу синтеза к поиску решения уравнения Беллмана – нелинейного дифференциального уравнения в частных производных относительно производящей функции, которая определяет закон оптимального управления. В работах [12] установлена связь между функциями Ляпунова [5], разрешающими задачу асимптотической устойчивости движения, и указанным уравнением Беллмана. Эта связь состоит в том, что уравнению Беллмана удовлетворяет некоторое множество производящих функций. Отсюда с помощью метода Ляпунова можно отбирать требуемые решения среди всех возможных, которые определяются уравнением Беллмана. Причем, эти решения будут всегда существовать в силу постулата устойчивости Н.Г.Четаева [3,4]. Приложение постулата устойчивости к рассматриваемой нами проблеме синтеза нелинейных оптимальных динамических систем означает, что в основу процедур синтеза должно быть положено построение асимптотически устойчивых движений, описываемых некоторой совокупностью дифференциальных уравнений. Эта общая концепция получила существенное развитие в работах [1,7,8].

Общая постановка задачи

Задача синтеза замкнутой системы управления может быть сформулирована следующим образом: среди множества возможных законов управления $u\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, являющихся функциями фазовых координат $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, требуется выделить некоторое множество или один закон управления объектом:

$$x_i\left(t\right)=f_i\left(x_1\ldots x_n,u_1\ldots u_m\right),\ i=1,\ldots,n;\ m\leqslant n, \tag{1}$$

обеспечивающее(ий) асимптотическую устойчивость его возмущенного движения в определенной области фазового пространства или асимптотическую устойчивость в целом. Такие законы принято называть стабилизирующими. Большой интерес в этом смысле имеет теорема Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [5,11]. На основе этой теоремы сформировался подход к получению достаточных условий стабилизируемости, который состоит в следующем [7].

Вводится положительно-определенная функция Ляпунова $V\left(x_1,\ldots,x_n\right)>0$ и находится ее полная производная по времени:

$$\dot{V}\left(t\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i\left(x_1\ldots x_n,u_1\ldots u_m\right)+\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{2}$$

 ISSN 1560-8956

Задача состоит в выборе такого управления $u\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, для которого выполняется условие:

$$V\left(t\right)\leqslant -W\left(x_1\ldots x_n,t\right), \tag{3}$$

где $W\left(x_1\ldots x_n,t\right)$ – заданная положительно-определенная функция. С учетом (3) выражение (2) примет вид:

$$\begin{gathered}S\left(x_1\ldots x_n,u,t\right)=\\=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i\left(x_1\ldots x_n,u_1\ldots u_m\right)+W\left(x_1\ldots x_n,t\right)+\frac{\partial V}{\partial t}\leqslant 0\end{gathered}\cdot \tag{4}$$

Законы управления $u_{st}\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, обеспечивающие выполнение условия (4) в вычислительном отношении крайне труден, не говоря уже о получении аналитических решений. Этим, по существу, и объясняется проблема синтеза стабилизирующих законов управления для достаточно общих классов нелинейных объектов. Сложность решения данной проблемы значительно возрастает с повышением размерности нелинейных объектов.

Анализ существующих результатов

Устойчивость далеко не исчерпывает совокупности требований, обычно предъявляемых к динамическим свойствам синтезируемой системы. Во многих случаях необходимо обеспечить также требования к качеству управления, которое в теории оптимальных систем оценивается интегральными критериями качества.

Класс задач АКОР в этом случае формулируется следующим образом: среди возможных стабилизирующих законов управления, гарантирующих асимптотическую устойчивость объекта (1), найти такой закон управления $u_{opt}\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, который обеспечивает минимум критерия качества:

$$I=\int_0^\infty W\left(x_1\ldots x_n,u_1\ldots u_m\right)dt, \tag{5}$$

где $W\left(x_1\ldots x_n,u_1\ldots u_m\right)$ – некоторая неотрицательная функция на траекториях движения исходного объекта (1).

В настоящее время решению этого класса задач посвящен целый ряд работ [1,2,3,8-17]. В нелинейной теории АКОР в основе решения этих задач лежит теорема оптимальной стабилизации [1,8], которая устанавливает связь между задачами устойчивости и оптимальности систем управления. Эту связь можно записать в аналитической форме в следующем виде:

$$V_0\left(t\right)=-W\left(x_1\ldots x_n,u_{jopt}\right),\ j=1,2,\ldots,m. \tag{6}$$

Уравнение (6) говорит о том, что использование оптимальных функций Ляпунова $V_0\left(x_1\ldots x_n\right)$ позволяет из всего множества возможных управлений выделить те, которые обеспечивают как асимптотическую устойчивость, так и оптимальность системы по соответствующему критерию качества.

В зависимости от вида используемых подынтегральных функций $W\left(x_1 \ldots x_n, u_j\right)$ критерия (5) имеем:

$$\min \int\limits_0^\infty W\left(x_1 \ldots x_n, u_{jopt}\right) = V_0\left(x_1 \ldots x_n\right), \qquad (7)$$

и при оптимизации можем получить различные динамические свойства системы.

Возможности поиска решений уравнения (6), в силу исходных уравнений объекта (1), определяют успех в проблеме синтеза оптимальной системы. В этой связи, следует отметить, что трудности синтеза нелинейных оптимальных систем сводятся к рациональному выбору в (7) подынтегральных функций $W\left(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_m\right)$, отражающих требования к качеству динамики систем, а также к поиску решений уравнения (6). Недостаточно обоснованный выбор функции W хотя и может привести к устойчивому движению системы, однако , построенные на ее основе стабилизирующие управления могут оказаться малопригодными для практической реализации.

Конкретизируем процедуру АКОР для нелинейных объектов (1) с линейно входящими управлениями:

$$x_i\left(t\right) = f_i\left(x_1 \ldots x_n\right) + \sum_{j=1}^{m} G_{ij}\left(x_1 \ldots x_n\right) u_j, i = 1, 2, \ldots, n, m \leqslant n. \qquad (8)$$

Для данного класса объектов достаточно хорошо разработана процедура АКОР А.М.Летовым и Р.Калманом. Метод АКОР Летова-Калмана [12,15] рассматривает оптимизацию объектов (8), для которых критерий (5) имеет следующий вид:

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \left(\sum_{i,k=1}^{n} \beta_{ik} x_i x_k + \sum_{j=1}^{m} m_j^2 u_j^2 \right) dt. \qquad (9)$$

В этом случае, управление, доставляющее минимум критерию (9), будет иметь вид [14]:

$$u_j = -\frac{1}{m_j^2} \sum_{i=1}^{n} G_{ij}\left(x_1 \ldots x_n\right) \frac{\partial V_0}{\partial x_i}, \qquad (10)$$

где $V_0\left(x_1 \ldots x_n\right)$ – решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_0}{\partial x_i} f_i - \frac{1}{2m_j^2} \left(G_{ij} \frac{\partial V_0}{\partial x_i} \right)^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{ik} x_i x_k. \qquad (11)$$

 ISSN 1560-8956

В прикладном плане теперь задача синтеза закона управления (10) сводится к поиску вынужденного решения $V_0\left(x_1 \ldots x_n\right)$ уравнения (11), являющегося нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных. К сожалению, методы аналитического и даже численного решения этого уравнения отсутствуют [13], хотя, как математическая процедура, уравнения (5)–(11) известны в литературе уже давно [1,12,13]. Разработка методов решения этих уравнений дала бы существенный прогресс в решении нелинейной проблемы АКОР.

Перейдем далее к методу А.А.Красовского[1,13,14], который для оптимизации нелинейных объектов (1) предусматривает использование критерия обобщенной работы:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[\sum_{i,k=1}^{n}\beta_{ik}x_ix_k+\sum_{j=1}^{m}m_j^2u_j^2+\sum_{j=1}^{m}\left(m_j\sum_{i=1}^{n}B_{ij}\frac{\partial V_0}{\partial x_i}\right)\right]. \qquad (12)$$

В этом случае, оптимальный закон управления, обеспечивающий минимум критерия (12), определяется выражением

$$u_j=-\frac{1}{m_j^2}\sum_{i=1}^{n}B_{ij}\frac{\partial V_0}{\partial x_i}, \qquad (13)$$

где функция $V_0\left(x_1 \ldots x_n\right)$ является вынужденным решением уравнения

$$\frac{\partial V_0}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_0}{\partial x_i}f_i=-\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\beta_{ik}x_ix_k. \qquad (14)$$

Характерной особенностью уравнения (14) является то, что его левая часть может рассматриваться как производная по времени функции $V_0\left(t\right)$ при $u_j=0$, т.е. V_0 является функцией Ляпунова, а уравнение (14) – уравнением Ляпунова для неуправляемого объекта. Отсюда возникает проблема с непосредственным применением метода А.А. Красовского для нелинейных объектов, которые при отсутствии управлений ($u_j=0$) должны быть устойчивыми или заранее стабилизированными с помощью отдельной системы. В этой связи, в работах [13] изложена процедура применения этого метода для неустойчивых и нейтральных объектов, основанная на преобразовании исходных дифференциальных уравнений (1) и функционала (12) к специальным нестационарным формам.

Достоинство метода А.А. Красовского с критерием обобщенной работы (12) состоит в том, что уравнение (14), в отличие от уравнения (11), представляет собой уже линейное дифференциальное уравнение в частных производных. Это позволяет для уравнения (14) с различными граничными условиями, разработать приближенные методы его решения на основе степенных рядов путем многократного применения некоторого оператора или опираясь на метод характеристик [17]. Также несомненный интерес представляет использование прогнозирующих моделей процессов управления [13,14].

Метод А.А. Красовского является фактически единственным методом в современной теории управления, позволяющим осуществить обобщенный совмещенный синтез, когда реализуется не только текущее формирование закона управления, но и может происходить текущая идентификация, что в литературе определяется термином “дуальное управление”.

Аналитическое конструирование агрегированных регуляторов (синергетический подход)

Предложенное в работе [16] аналитическое конструирование агрегированных регуляторов (АКАР) в смысле обеспечения асимптотической устойчивости и заданных динамических свойств переходных процессов базируется на введении сопровождающих функционалов вида:

$$I_{\sum} = \int\limits_0^{\infty} F\left(\psi, \psi\right) dt, \tag{15}$$

где $F\left(\psi, \psi\right)$ – непрерывно-дифференцируемая по своим аргументам функция; $\psi\left(x_1 \ldots x_n\right)$ – агрегированная макропеременная, представляющая собой некоторую произвольную дифференцируемую или кусочно-непрерывную функцию фазовых координат $(x_1, \ldots, x_n)$, причем $\psi\left(0, \ldots, 0\right) = 0$.

Суть синергетического подхода заключается в том, чтобы сконструировать сопровождающую функцию таким образом, чтобы определить в фазовом пространстве рассматриваемого нелинейного объекта некоторую совокупность точек, к которой притягиваются все близкие траектории движения. Такую совокупность точек принято называть аттрактором [16]. Вышесказанное фактически соответствует базовому принципу синергетики – принципу подчинения, на котором построена теория самоорганизации нелинейных динамических систем [17].

В частности, для нелинейного объекта вида:

$$\begin{gathered} x_1\left(t\right) = f_i\left(x_1 \ldots x_n\right), i = 1, n-1, \\ x_n = f_n\left(x_1 \ldots x_n\right) + u. \end{gathered} \tag{16}$$

при скалярном управлении в качестве подынтегральной функции в (15) целесообразно выбрать следующую квадратичную форму:

$$F\left(\psi, \psi\right) = m^2 \phi^2\left(\psi\right) + c^2 \psi^2\left(t\right) \tag{17}$$

При этом функции $\phi\left(\psi\right)$ должны удовлетворять следующим условиям:

1. однозначности, непрерывности и дифференцируемости при всех значениях ψ;
2. $\phi(0) = 0$;
3. $\phi(\psi)\psi \geqslant 0$ при любых $\psi \neq 0$.

Иначе говоря, функции $\phi(\psi)$ в этом случае будут иметь тот же знак, что и ψ, а в нуль они обращаются только на многообразии $\psi = 0$.

Определив полную производную функции ψ

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi(x_1 \ldots x_n)}{\partial x_k} x_k(t) \tag{18}$$

и подставив ее и правые части уравнения (16) в (17), получим интегральный критерий (15) в следующем виде:

$$I_{\sum} = \int_0^\infty \left[m^2\phi^2(\psi) + c^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial x_k} f_k + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} u \right) \right] dt. \tag{19}$$

Таким образом, используя метод АКАР, мы можем исходную задачу привести к стандартной задаче АКОР [12]. Основной трудностью практического использования данного метода остается корректный выбор сопровождающих функционалов.

Пример

Покажем идентичность результатов метода АКАР и метода АКОР на примере линейной динамической системы вида:

$$x(t) + ax = u, \tag{20}$$

для которой критерий качества построим на основе сопровождающего функционала (15) в виде:

$$I_1 = \int_0^\infty \left[m^2\psi^2 + c^2\psi^2(t) \right] dt. \tag{21}$$

При этом

$$\psi(t) = \frac{\partial\psi}{\partial x} x(t). \tag{22}$$

Определим производную макропеременной ψ на решениях объекта (20), для чего подставим в выражение (22) производную переменной $x(t)$ из (20), т.е.:

$$\psi(t) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(u - ax). \tag{23}$$

Подставим теперь выражение (23) в функционал (21):

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \left[m^2\psi^2(x) + c^2\left(a^2x^2 - 2axu\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 u^2 \right] dt. \quad (24)$$

Положим $\psi = x$, тогда (24) примет вид:

$$I_1 = \int\limits_0^\infty m^2 + a^2c^2x^2 - 2ac^2xu + c^2u^2 dt \quad (25)$$

Далее, используя функцию Лагранжа $\lambda(t)$, запишем лагранжиан

$$L_1 = m^2 + a^2c^2x^2 - 2ac^2xu + c^2u^2 + \lambda(x + ax - u). \quad (26)$$

Для лагранжиана (26) уравнения Эйлера-Лагранжа примут вид:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial x}\right) = 2\left(m^2 + a^2c^2\right)x - 2ac^2u + \lambda a - \lambda(t), \quad (27)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial u}\right) = 2c^2u - 2ac^2x - \lambda. \quad (28)$$

Легко показать, что для устойчивой системы оптимальное управление

$$u_0 = -\left(\frac{m}{c} - a\right)x \quad (29)$$

полностью совпадает с результатом стандартной процедуры АКОР для объекта (20) и квадратичного критерия (9) в виде:

$$I_1 = \int \left[\left(m^2 - a^2c^2\right)x^2 + c^2u^2\right] dt. \quad (30)$$

Заключение

В данной статье метод АКАР представлен как метод динамического синтеза законов управления, т.к. используемый функционал играет вспомогательную роль (является сопровождающим) и поэтому основной задачей является обеспечение асимптотической устойчивости движения и заданного качества переходных процессов. Однако, данный метод при соответствующей модификации [17] может использоваться как метод оптимального управления с заданным критерием оптимизации. Использование в методе АКАР принципов синергетики существенно расширяет возможности в решении проблемы оптимального управления нелинейными объектами.

Список использованных источников

1. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений/ Н.Н. Красовский– М.: Наука, 1987. – 456 с.
2. Летов А.М. Некоторые нерешенные задачи теории автоматического управления/ А.М. Летов – М.: Наука, 1966. – 256 с.
3. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике/ Н.Г. Четаев – М.: Наука, 1965. – 176 с.
4. Современная теория систем управления / Под ред. К.Т. Леондеса. – М.: Наука,1970. – 512 с.
5. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова/ Е.А. Барбашин – М.: Наука, 1970. – 240 с.
6. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов/ Понтрягин Л.С., В.Г.Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко – М.: Наука, 1969. – 392 с.
7. Кунцевич В.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова/ В.М. Кунцевич, М.М. Лычак – М.: Наука, 1977. – 400 с.
8. Фурасов В.Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация/ В.Д. Фурасов – М.: Наука 1977. – 248 с.
9. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления/ В.Г. Болтянский – М.:Наука, 1966. – 360 с.
10. Иванов В.А. Теория оптимальных систем автоматического управления/ В.А. Иванов, Н.В. Фалдин –М.: Наука, 1981. – 336 с.
11. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения/ Н.Н. Красовский – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
12. Летов А.М. Динамика полета и управление/ А.М.Летов – М.: Наука, 1969. – 360 с.
13. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование/ А.А.Красовский – М.: Наука, 1973. – 560 с.
14. Красовский А.А. Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами/ А.А. Красовский, В.Н.Буков, В.С. Шендрик – М.: Наука, 1977. – 272 с.
15. Kalman R. Contribution to the theory of optimal control/ R.Kalman // Bul.Soc.Mech.Mat. – 1960. Vol.12, No.2. – P.102–119.
16. Колесников А.А. Синергетическая теория управления/ А.А. Колесников – Таганрог:ТРТУ, Энергоатомиздат, 1994. – 344 с.
17. Хакен. Г. Синергетика/ Г. Хакен. Иерархия неустойчивости в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1980. – 404 с.

Отримано 24.10.2015 р.