УДК 521.179

А.А. Стенин, В.П. Пасько, М.А. Солдатова

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ПО РАСХОДУ ТОПЛИВА УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Аннотация: рассмотрены особенности оптимизации линейных динамических систем с последействием. В качестве примера, на основе принципа минимума и метода фазовой плоскости, построены кривые переключения и отключения оптимального по расходу топлива управления системой второго порядка.

Ключевые слова: линейные динамические системы, последействие, принцип минимума, метод фазовой плоскости, оптимальное управление.

Введение

В ряде случаев синтез оптимальных законов управления осложняется эффектом запаздывания в состоянии, который, в частности, для объектов химической промышленности объясняется процессами рециркуляции, возникающими при перемешивании реагентов в химических реакторах [1].

В промышленных объектах под рециклом понимается возврат части продукта с выхода объекта на его вход с целью повторной переработки. Большинство промышленных объектов управления имеют запаздывания. Наличие запаздывания объясняется конечной скоростью распространения потоков информации в технологических объектах. Наряду с этим при понижении порядка модели объекта вводят дополнительное динамическое запаздывание. Для этого выделяют одну наибольшую постоянную времени, а все остальные малые постоянные времени заменяют звеном динамического запаздывания. Во всех этих случаях принято говорить о системах с последействием [2].

Общая характеристика задачи

Пусть в n-мерном фазовом пространстве задана автономная динамическая система, описываемая векторным дифференциальным уравнением вида:

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}\left[\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t)\right], \ (t_0 \leqslant t \leqslant t_k), \tag{1}$$

где $\bar{f}$ – n-мерная вектор-функция; $\bar{x}$ – n-мерный вектор состояния; $\bar{y}$ – вектор размерности m, элементами которого являются функции $y_j = x_j(t-\tau_j)$, $j=\overline{1,m}$; $\tau_j = \text{const} > 0$; $\bar{u}$ – r-мерный вектор управляющих воздействий.

Система (1) удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$\begin{aligned} &\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \\ &x_j(t) = \phi_j(t) \text{ при } t_0 - \tau_j \leqslant t \leqslant t_0, j = \overline{1, m}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\phi_j(t)$ – заданная функция.

Управление $\bar{u}(t) \subset U$, где U – некоторое подпространство r-мерного пространства, представляющее собой область допустимых управляющих воздействий. Задачей оптимального управления является нахождение такой функции $\bar{u}(t)$, которая при переводе системы (1) из начального состояния (2) в конечное минимизировала бы функционал вида:

$$I = \int\limits_{t_0}^{t_k} \left[k + \sum_{k=1}^{r} |u_k(t)| \right] dt, \tag{3}$$

где t_k – не фиксировано и $0 \leqslant k \leqslant \infty$. Функционал представляет собой линейную комбинацию критериев максимального быстродействия и чистого расхода топлива.

Задача синтеза в данном случае решается на основе принципа минимума Понтрягина, использование которого позволяет сделать вывод о существовании такой ненулевой непрерывнойn-мерной вектор-функции, что оптимальное управление минимизирует гамильтониан $H(\bar{\psi}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$:

$$H = k + \sum_{k=1}^{r} |u_k| + < \bar{\psi}, \bar{f} >.$$

При этом вектор-функция $\bar{\psi}(t)$ удовлетворяет следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial \psi_i(t)}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} - \Delta^i(t) \left[\frac{\partial H}{\partial y_i} \right]^{i+\tau_i},$$

где $\Delta^i(t) = 1/4[1 + \text{sign}(m - i)][1 + \text{sign}(t_k - t_i - t)];(\text{sign}\, 0 = 1)$ и начальным условиям $\bar{\psi}(t_0) = \bar{\psi}_0$.

Из последнего выражения видно, что для нахождения вектор-функции $\bar{\psi}(t)$ необходимо знать $\bar{\psi}(t + \tau)$, а это существенно осложняет нахождение оптимального управления. Рассмотрим влияние последействия на оптимальный процесс для линейных стационарных систем.

Постановка задачи

Модель линейных автономных систем управления (1) можно записать в матричном виде следующим образом:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + A_1\bar{y} + B\bar{u}, \tag{4}$$

где A – матрица коэффициентов $\left\|a^1_{ij}\right\|$ $(i,j=\overline{1,n})$; A_1 – матрица коэффициентов $\left\|a^1_{ij}\right\|$ ($i=\overline{1,n}$; $k=\overline{1,m}$; $m\leqslant n$); B– матрица коэффициентов $\|b_{ij}\|$ $(i=\overline{1,n}$; $l=\overline{1,r}$; $r\leqslant n)$.

Тогда в случае известной функции $\bar{\psi}(t)$ оптимальное управление определяется из условия минимума гамильтониана H [3,5], который примет вид:

$$H=k+\sum_{k=1}^{r}|u_k|+<A\bar{x},\bar{\psi}>+<\bar{u},B^T\bar{\psi}> .$$

Обозначим через q_k элементы вектора $B^T\bar{\psi}$. Тогда управление, абсолютно минимизирующее гамильтониан H, можно записать в виде

$$\begin{array}{lll} u^*_k(t)=0, & \text{если} & |q_k|<1; \\ u^*_k(t)=-\operatorname{sign}\{q_k\}, & \text{если} & |q_k|>1. \end{array}$$

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая двумерного фазового пространства. Это обусловлено, с одной стороны, широким использованием дифференциальных уравнений второго порядка для описания или аппроксимации динамики реальных объектов и технологических процессов, с другой стороны, возможностью решать сопряженную систему с опережающим аргументом, что даст возможность обобщить полученный результат на линейные нестационарные системы.

Вопросы невырожденности таких задач рассмотрены в работах [3.4], вопросы единственности оптимальных управлений рассмотрены в работе [3], где сформулированы теоремы существования и единственности.

Решение задачи

Для анализа особенностей синтеза таких систем рассмотрим частный случай системы (4) при следующих значениях коэффициентов $a_{ij}=0$; $(i,j=1,2)$; $a^1_{11}=a^1_{21}=a^1_{22}=0$; $a^1_{12}=1$; $B=(0,1)^T$.

На основе гамильтониана

$$H=k+|u|+\psi_1(t)x_2(t-\tau)+\psi_2(t)u(t) \tag{5}$$

получаем сопряженную систему

$$\begin{array}{ll} \dot{\psi}_1=0 & (t_0\leqslant t\leqslant t_k); \\ \dot{\psi}_2=-\psi_1(t+\tau) & (t_0\leqslant t\leqslant t_k-\tau); \\ \dot{\psi}_2=0 & (t_k-\tau\leqslant t\leqslant t_k), \end{array}$$

решениями которой будут функции

$$\begin{array}{ll} \psi_1=\psi_{10}; & (t_0\leqslant t\leqslant t_k); \\ \psi_2=-\psi_{10}t+\psi_{20}; & (t_0\leqslant t\leqslant t_k-\tau); \\ \psi_2=-\psi_{10}t_k+\psi_2=\text{const} & (t_k-\tau\leqslant t\leqslant t_k). \end{array} \tag{6}$$

 ISSN 1560-8956

Исходя из гамильтониана (5), оптимальным управлением является

$$u^*(t) = -\operatorname{sign}\{\psi_2\} \text{ при } |\psi_2| > 1; \tag{7}$$

$$u^*(t) = 0 \text{ при } |\psi_2| < 1. \tag{8}$$

Необходимо из начальной точки $x_1(t_0) = x_{10}; x_2(t) = \phi(t)$ при $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ попасть в конечную $x_1(t_k)$, $x_2(t_k)$ так, чтобы значение $u(t)$ минимизировало критерий оптимизации (3). Для упрощения выкладок и не теряя общности решения, примем $x_1(t_k) = x_2(t_k) = 0$ и $t_0 = 0$.

Очевидно, для сохранения установившегося движения системы при $t \geqslant t_k$ условие равновесия системы определится как $x_2(t) = 0\,(t_k - \tau \leqslant t \leqslant t_k)$; $u\,(t) \equiv 0$.

Для нахождения оптимальных кривых управления согласно [6] используется обратное время $z = t_k - t$ со “сшивкой” соответствующих интервалов движения системы с учетом требований, налагаемых на начальное и конечное состояния. Тогда система (4) для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(z) &= -x_2(z+\tau); \\ \dot{x}_2(z) &= -u(z), \end{aligned} \tag{9}$$

причем

$$x_2(z) = 0 \ (0 \leqslant z \leqslant \tau); \tag{10}$$

$$x_2(z) = \phi(t_k - z)(t_k \leqslant z \leqslant t_k + \tau). \tag{11}$$

На основании выражений (6) – (8) заключаем, что оптимальной в общем случае является последовательность управлений u_0, 0, $-u_0(u_0 = \pm 1)$, где Изменение значения управления происходит в моменты z_1 и z_2. Тогда при движении (9) из начала координат с учетом (10) и (11) получим следующие уравнения:

$$x_2(z) = -u_0 z + u_0 \tau \ (\tau \leqslant z \leqslant z_1); \tag{12}$$

$$x_2(z) = -u_0 z_1 + u_0 \tau \ (z_1 \leqslant z \leqslant z_2); \tag{13}$$

$$x_2(z) = u_0 z - u_0(z_1 + z_2 - \tau) \ (z_2 \leqslant z \leqslant t_k); \tag{14}$$

$$x_1(z) = \frac{u_0 z^2}{2} \ (0 \leqslant z \leqslant z_1 - \tau); \tag{15}$$

$$x_1(z) = u_0 z_1 z - \frac{u_0(z_1 - \tau)^2}{2}; \ (z_1 - \tau \leqslant z \leqslant z_2 - \tau); \tag{16}$$

$$x_1(z) = \frac{u_0(z+\tau)^2}{2} + u_0(z_1 + z_2 - \tau) + \frac{u_0\tau^2}{2} - \frac{u_0(z_1-\tau)^2}{2} - \frac{u_0(z_2-\tau)^2}{2} \tag{17}$$

$$(z_2 - \tau \leqslant z \leqslant t_k - \tau).$$

Решая совместно уравнения (12) и (16) для момента времени $z = z_1$ находим оптимальную кривую переключения γ_2 с нулевого значения управления на $+u_0$:

$$x_1 = \frac{1}{2u}x_2^2 - x_2\tau \tag{18}$$

при условии, что $z_2 - z_1 \geqslant \tau$. Учитывая тот факт, что вдоль оптимальной траектории гамильтониан равен нулю, а также то, что $\psi_2(z_2) - \psi_2(z_1) = \{\psi_{10}(z_2 - z_1) = 2u_0\}$, находим:

$$z_2 - z_1 = -\frac{2x_2u_0}{k}. \tag{19}$$

Тогда, решая совместно уравнения (12), (17) и (19) для момента времени $z = z_1$, находим оптимальную кривую переключения γ_2 (рис. 1) с нулевого значения управления на $+u_0$:

$$x_1 = \frac{k^2-4}{2uk^2}x_2^2 - x_2\tau(1+\frac{2}{k}) - \frac{u_0\tau^2}{2}, \tag{20}$$

справедливую при $z_2 - z_1 \geqslant \tau$ и $x_2 \leqslant -\frac{k\tau}{2u_0}$.

Для момента времени $z = z_2$, при котором управление изменяется с $-u_0$ на нулевое, в отличие от момента $z = z_1$, существует единая оптимальная кривая переключения δ (рис. 1), определяемая совместным решением уравнений (14), (17) и (19):

$$x_1 = \frac{k+4}{2uk_0}x_2^2 - x_2\tau - \frac{u_0\tau^2}{2}. \tag{21}$$

Наличие запаздывания τ приводит к образованию областей неоптимальности, из которых при данной начальной функции нельзя перевести систему в начало координат за два момента переключения. Расположение одной из них на фазовой плоскости соответствует на рисунке заштрихованной области, вторая симметрична первой относительно начала координат. Границы областей неоптимальности находятся как геометрическое место точек фазовой плоскости, из которых изображающая точка достигает за время $t = \tau$ траектории движения системы линии Ak (рис. 1), уравнение которой записывается в виде

$$x_1 = \frac{1}{2u_0}(x_2 - u_0\tau)^2. \tag{22}$$

 ISSN 1560-8956

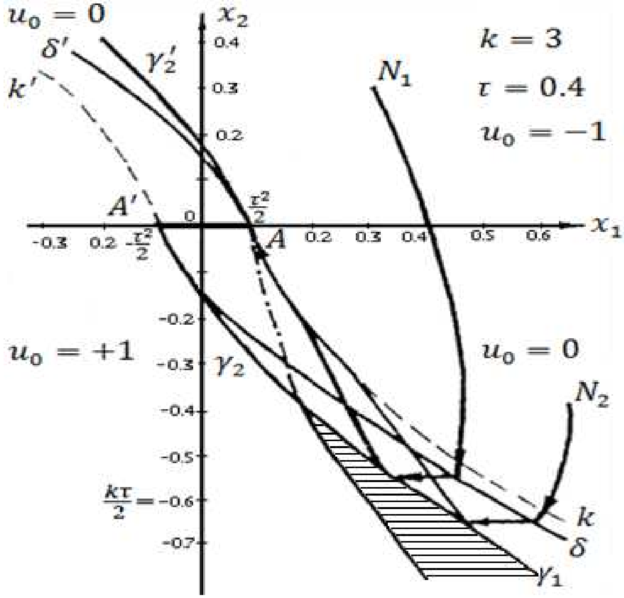

Рис. 1 – Фазовый портрет оптимальной системы с последействием

Таким образом, на фазовой плоскости определены области, однозначно определяющие значение управляющего воздействия, что дает возможность практически реализовать замкнутый оптимальный закон оптимального по расходу топлива управления.

Заключение

Использование принципа минимума в сочетании с методом фазового пространства позволяет синтезировать замкнутый оптимальный по расходу топлива закон управления линейной динамической системой с последействием. Процедура проиллюстрирована реализацией оптимального закона управления для одного из типов систем второго порядка с последействием, которыми может быть описана динамика достаточно широкого класса реальных промышленных объектов. Предложенную процедуру синтеза можно обобщить на системы более высокого порядка.

Список использованых источников

1. Системы автоматического управления с запаздыванием: учебное пособие / Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, А.В. Лагутин, О.Г. Иванова, В.М. Тютюнник. // Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 76 с.

2. Хартовский В.Е. Задачи идентификации и управления выходом для систем с запаздываниями // Автоматика и телемеханіка, 2011. – № 5. – С. 17–31.
3. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968.– 764 с.
4. Понтрягин Л.С.,Болтянский В,Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.В. Математическая теория оптимальных процессов. –М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.
5. Карамзин Д.Ю. Принцип максимума в задаче управления при ограниченных фазовых координатах // Автоматика и телемеханика. –2007,–№ 2. – С. 26–38.
6. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.В. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

Отримано 14.10.2015 р.