УДК 519.711.2

А. А. Стенин, В. П. Пасько, М. А. Солдатова, М. М. Ткач

МЕТОДЫ АГРЕГИРОВАНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация. В данной статье предложены методы агрегирования переменных состояния и управления, что позволяет существенно снизить размерность дифференциальных уравнений, описывающих динамику сложных технических систем. Кроме того, предложена процедура упрощения структуры замкнутого по переменным состояния оптимального регулятора.

Ключевые слова: линейная стационарная система, агрегирование переменных, матрица агрегации, градиентная процедура, квадратичный функционал

Введение

В силу весьма высоких требований к вычислительным устройствам, позволяющим выполнять многократное моделирование динамических моделей высокого порядка в реальном или ускоренном масштабе времени, на практике рационально допустить некоторое ухудшение качества моделирования, чтобы значительно снизить требования к характеристикам вычислителя. Такой подход является отправным для проведения исследований, связанных с упрощением динамических моделей сложных технических систем в отдельных режимах функционирования. В связи с этим, на этапе разработки математической модели динамики сложной технической системы наряду с теоретическими вопросами (выбор математического аппарата, системы координат и т. д.) приходится решать и практические задачи, связанные с выбором структуры системы и переменных состояния. Очевидно, целесообразным является выбор такой модели и структуры, которые бы описывались минимальным числом переменных (без искажения физической сути динамического объекта) [3].

Вопрос о применимости определенной упрощенной схемы зависит от специфических свойств конкретного режима и должен решаться в каждом случае самостоятельно.

Одним из направлений построения упрощенных моделей являются методы, основанные на сокращении размерности вектора состояний. Для синтеза эталонных реализаций отдельных динамических режимов сложных технических систем удобней использовать упрощенную модель с компонентами вектора состояния, определяющими динамику данного режима.

Такое направление относится к агрегированию, сущность которого можно сформулировать следующим образом: если система имеет значительное количество показателей, то возникает потребность перейти к укрупненным величинам, так называемым агрегатам, число которых значительно меньше по сравнению с исходными переменными [1].

Другими словами, система S_1 с *n*-мерным вектором состояния $\overline{x}$ сопоставляется с системой S_2 с вектором $\overline{z}$ размерности меньше *n*. Таким образом, система S_2 может рассматриваться в качестве приближенной модели для S_1 и в рамках такой более грубой модели имеется возможность дать исчерпывающий анализ ее функционирования [2].

Введение макропеременных (агрегированных переменных) позволяет резко понизить размерность задачи и, следовательно, упростить путь нахождения ее решения. Агрегированная задача, как правило, может решаться в конечном виде, либо играть роль координирующей в интерактивном процессе формирования решения исходной задачи.

Существуют два основных пути создания агрегированной задачи: один из них связан с понижением количества дифференциальных уравнений, описывающих динамический процесс управления – в этом случае речь идёт о введении макропеременных по вектору состояния системы (задача 1), другой способ рассматривает упрощение задачи на основе агрегирования управляющих воздействий (задача 2).

Кроме того, можно существенно упрощать структуру самого оптимального регулятора, что также приводит к улучшению скоростных характеристик программного обеспечения тренажеров. Такая возможность, в частности, появляется в тех случаях, когда разработчик, учитывая потребности каналов управления по обратным связям в конкретных компонентах вектора состояния, искусственно выделяет «главную» и «второстепенную» для каждого режима части фазового вектора.

Действительно, поскольку оптимальное управление представляет собой линейную комбинацию всех координат вектора $\overline{x}(t)$, взвешенную с коэффициентами *k*, то между *i*-ой составляющей вектора $\overline{u}(t)$ и *j*-ой составляющей вектора $\overline{x}(t)$ существует связь, характеризуемая коэффициентами k_{ij}, причем при больших *n* и *m*, число таких связей $N = n \times m$ велико, что значительно усложняет техническую реализацию регулятора и снижает его надёжность. В связи с этим и возникает задача выявления таких связей, которые можно исключить, не ухудшая при этом значительно качества регулирования (задача 3).

Рассмотрим постановки и решения этих задач на примере линейной стационарной динамической системы.

Постановка задачи 1

Пусть задана динамическая система вида

$$\dot{\overline{x}}(t) = A\overline{x}(t) + B\overline{u}(t), \quad x \in R^r, u \in U \subset R^*, t \in T; \tag{1}$$

где A и B – постоянные матрицы размера $(n \times m)$, $(n \times r)$; U – замкнутое ограниченное множество в R^r.

Пусть в каждый момент t необходимо задать не все координаты вектора фазового состояния $\overline{x}$, в котором находится сама система (1), а лишь некоторый ограниченный набор скалярных величин $z=(z_1,\ldots,z_\nu)^{\mathrm{T}}$, количество которых $\nu < n$ и которые характеризуют текущее состояние x с интересующей разработчика стороны.

Решение задачи 1

Предлагаемый метод, ориентированный на агрегирование переменных состояния линейных динамических систем с постоянными и переменными параметрами, состоит в следующем. Стационарная линейная динамическая система (1) путём преобразования $z(t) = \Pi x(t)$, где Π – матрица размерности $(\nu \times n)$, представляется в виде

$$z(t) = A_z z(t) + B_z u(t), \quad z(t_0) = \Pi x^0,$$

здесь матрицы A_z и B_z определяются условиями: $A_z\Pi = \Pi_A$, $B_z = \Pi_B$, а в случае, когда матрицы A и Π удовлетворяют соотношению $\Pi_A = \Pi_A \Pi(\Pi\Pi')^{-1}\Pi$, матрицу состояния агрегированного фазового вектора можно представить в виде:

$$A_z = \Pi_A \Pi'(\Pi\Pi')^{-1}.$$

Основной трудностью является выбор матрицы агрегирования П. В работе предлагается подход, основанный на минимизации квадрата ошибки решения агрегированной задачи относительно исходной. Формируя решение уравнения:

$$\overline{e}(t) = A_z\overline{e}(t) + (A_z\Pi - \Pi_A)\overline{x}(t)$$

для ошибки $\overline{e}(t) = \overline{z}(t) - \Pi\overline{x}(t)$, которое запишется в виде:

$$\overline{e}(t) = \exp(A_z(t-t_0))\overline{e}(t_0) + \int_0^t \exp(A_z(t-\xi))(A_z\Pi - \Pi A)\overline{x}(\xi)d\xi, \tag{2}$$

и построив квадратичную функцию от (2)

$$\alpha(\overline{e}) = \overline{e}'\overline{e}(t), \tag{3}$$

можно выбирать матрицу агрегации П из условия минимума (2) посредством традиционного градиентного метода [4]:

$$\Pi^{(k+1)} = \Pi^{(k)} - m^{(k)}[\mathrm{grad}_\Pi \alpha(\overline{e})]^{(k)}, \tag{4}$$

где $m^{(k)}$ – весовой множитель, определяемый условиями сходимости итерационной процедуры.

Следует отметить, что при определенных условиях, дифференциальное уравнение высокого порядка может быть заменено эквивалентным уравнением более низкого порядка [4]. Поэтому рассмотренный выше случай аппроксимации одним дифференциальным уравнением другого имеет более общий характер.

Постановка задачи 2

Рассмотрим задачу, связанную с агрегированием управляющих воздействий. В этом случае система (1) представляется в виде:

$$\begin{gathered} \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_m, t), \quad i \in [1, z], \\ \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_i, t), \quad i \in [r+1, n], \\ J(\overline{x}, \overline{u}) = W(x(t_f)) + \int_1^1 {}^f_0 f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t)dt, \end{gathered} \tag{5}$$

где $m < 1$, $r < n$, $f_0(.)$ не зависит от компонент $u_{m+1}, u_{m+r}, \ldots, u_L$ вектора управлений, которые и необходимо определить.

Решение задачи 2

Путём замены переменных

$$\tilde{x}_1 = x_1, \ldots, \tilde{x}_r = x_r, \tilde{u}_1 = u_1, \ldots, \tilde{u}_m = u_m, \tilde{u}_{m+1} = x_{r+1}, \ldots, \tilde{u}_j = x_n, \tag{6}$$

где $j = m + n - r$, формируется агрегированная задача:

$$\begin{gathered} \tilde{x}_i = f_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_r, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_j, t), \quad i \in [1, r], \\ J_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{u}) = W_\varepsilon(\tilde{x}(t_f)) + \int_1^1 {}^f_0 f_0^\Sigma(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_r, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_j, t)dt, \end{gathered} \tag{7}$$

причем $W_\Sigma(\tilde{x}(t_f)) < W(\tilde{x}(t_f)), \quad f_0^\Sigma(\tilde{x}, \tilde{u}, t) < f_0(\tilde{x}, \tilde{u}, t)$.

Таким образом, часть переменных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, которые в исходной задаче являются переменными состояния, в агрегированной задаче становятся компонентами вектора управлений, при этом сокращается размерность оптимизируемой системы [5].

Поиск решения исходной задачи осуществляется на основе решения агрегированной задачи таким образом, чтобы минимизировать невязку вида $\left| J(.) - J_{\Sigma}(.) \right| \to \min$. Далее восстанавливается решение исходной задачи путём обратного преобразования для оптимального решения агрегированной задачи:

$$\begin{aligned} x_i^*(t) &= x_i^{opt}(t), \quad i \in [1, r], \\ x_i^*(t) &= \tilde{u}_i^{opt}(t), \quad i \in [r+1, n], \\ u_i^*(t) &= \tilde{u}_i^{opt}(t), \quad i \in [1, m]. \end{aligned} \tag{8}$$

На основе этих результатов решается задача аппроксимации полученного решения функциями $\bar{x}(t)$ и $\bar{u}(t)$, которые предоставляют минимум функционалу.

Постановка задачи 3

Математически данная задача может формулироваться следующим образом. Представим элементы матрицы обратных связей в (1) в виде произведения двух величин:

$$k_{ij} = y_{ij} z_{ij}, \quad i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}, \tag{9}$$

где величины z_{ij} принимают одно из двух значений: 0 или 1. Если z_{ij}=1, то в регуляторе существует связь между u_i и x_j, характеризуемая коэффициентом y_{ij}, если же z_{ij} = 0, то такая связь отсутствует. Составляя из y_{ij} и z_{ij} $(m \times n)$-мерные матрицы *Y* и *Z* соответственно, соотношение (9) можно записать в виде:

$$K = K(Y, Z) = Y \cdot Z. \tag{10}$$

При этом регулятор, формируемый с помощью матриц *Y* и *Z*, называется «допустимым», если для него справедливо неравенство

$$J(Y, Z) \le (1 + \varepsilon) J_{\alpha pt}, \tag{11}$$

где ε – заданное «малое» число, которое характеризует допустимое ухудшение качества регулирования.

Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління» № 1' (28) 2016

Решение задачи 3

В общем случае, выполнение неравенства (11) может зависеть от начальных условий $\bar{x}(t_0)$. Однако предположение о том, что начальные условия являются случайными и распределены по нормальному закону, позволяет выразить неравенство (11) через вторые моменты. Задача выбора матрицы *Z* решается из условия выполнимости неравенства (11) и является некоторым вариантом задачи дискретного программирования [6]. Основная трудность в данном случае заключается в том, что зависимость *J*(*Y*, *Z*) от элементов матрицы *Z* оказывается очень сложной и каких-либо общих закономерностей выявить не удаётся. В частности, совершенно не очевидно, что исключение какой-либо связи в регуляторе обязательно приводит к ухудшению качества регулирования. Поэтому точное решение этой задачи можно получить только в результате полного перебора всех возможных матриц *Z* и вычисления соответствующих чисел *J*(*Y*, *Z*), что практически достаточно сложно при большом *N*.

Выбор матрицы *Y* осуществляется из условия:

$$J(K_{opt}, Z) = \min_k J(K, Z) \tag{12}$$

с использованием любого эффективного метода поиска минимума функции многих переменных [6], причём минимизация осуществляется по элементам *Y*, соответствующим единичным элементам Z.

Однако, такой подход является весьма трудоемким и не гарантирует приемлемого в смысле показателя качества процесса управления. Ниже предлагается метод упрощения структуры оптимального регулятора при скалярном управлении. Необходимо показать, как выбираются коэффициенты $k_{ij} = y_{ij} z_{ij}$, $i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}$. Пусть динамика объекта управления определяется как и ранее уравнением (1), записанным в виде нормированных отклонений переменных состояния:

$$\Delta\bar{x}(t) = A\Delta\bar{x}(t) + Bu(t). \tag{13}$$

Реализация оптимального регулятора в смысле квадратичного критерия качества, как известно [5], обеспечивается путем выбора соответствующей обратной связи:

$$u = \bar{p}^T \Delta\bar{x}, \tag{14}$$

где $p^T = (p_1, \ldots, p_n)$ – вектор-строка коэффициентов, найденных решением уравнения Риккати. Подставляя найденный закон управления (14) в исходную систему (13) имеем:

$$\Delta\bar{x}(t) = (A + B\bar{p}^T)\Delta\bar{x}(t). \tag{15}$$

Найденная замкнутая оптимальная система (15), обладающая заданными динамическими свойствами, имеет спектр корней $\{\lambda_i^*\}, i = \overline{1,n}$, соответствующий выбранным коэффициентам функционала:

$$Q = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\Delta\bar{x}^T Q \Delta\bar{x} + \Delta\bar{u}^T R \Delta\bar{u}\right) dt. \tag{16}$$

Веса коэффициентов функционала (16) в каждом режиме выбираются, исходя из важности той или иной переменной в данном режиме.

Известно, что качественные показатели рассматриваемых в работе линейных динамических систем определяются в основном расположением ближайших к началу координат корней характеристического полинома, называемых доминирующими, а также взаимным расположением остальных корней [4]. Отсюда мы можем выбрать часть корней, определяющих качественную динамику процесса управления, число которых будет определяться числом наиболее важных переменных в каждом рассматриваемом режиме. Далее решается задача модального управления для выбранных корней и переменных состояния методом неопределенных коэффициентов, предложенным авторами в работе [7].

Выводы

Предложенные в работе методы имеют несомненную практическую ценность при моделировании реальных объектов и синтезе управляющих воздействий, т.к. они позволяют не только сократить размерность дифференциальных уравнений, описывающих динамику сложных технических систем, но и упростить структуру оптимального в смысле квадратичного критерия закона управления такими системами.

Список использованных источников

1. *Павловский Ю. Н.* Проблема декомпозиции в математическом моделировании/ Ю. Н. Павловский, Т. Г. Смирнова – М. : Фазис, 1998. – 272 с.
2. *Сингх М.* Системы: декомпозиция, оптимизация, управление / М. Сингх, А. Титли – М.: Машиностроение, 1986. – 496 с.
3. Пухов Г. *Е.* Модели технологических процессов / Г. Е. Пухов, Ц. С. Хатиашвили – К. : Техніка, 1974. – 224 с.
4. *Красовский А. А.* Справочник по теории автоматического управления/ А. А. Красовский/ М. : Наука, 1997. – 712 с.

5. *Чаки Ф.* Современная теория управления. Нелинейные, оптимальные и адаптивные системы/ Ф. Чаки. – М.: Мир, 1975. – 422 с.
6. *Сигал И. Х.* Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы/ И. Х. Сигал, А. П. Иванова. М. : Физматлит, 2003. – 238 с.
7. *Стенин А. А.* Автоматизированные обучающие системы (анализ и синтез) / А. А. Стенин. – Луганск : Издательство восточно-украинского национального университета, 2000. – 109 с.