УДК 681.51

А. А. Стенин, Е. Ю. Мелкумян, Д. А. Гуменный

МОДАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ КРИТЕРИЯ ОЦЕНКИ ДЕЙСТВИЙ ЛЕТЧИКА В РЕЖИМАХ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Аннотация. В данной статье предложен метод модального синтеза критерия оценки действий летчика в режимах стабилизации движения летательного аппарата. Данный критерий может в полной мере использоваться для оценки качества работы автопилотов летательных аппаратов.

Ключевые слова: летательный аппарат, стабилизация движения, квадратичный критерий, модальный синтез.

Введение

В настоящее время совершенствование профессиональной подготовки летчика приобрело особую остроту в современных системах управления сложными летательными аппаратами. По оценкам отечественных и зарубежных источников более 70 % аварий в авиации происходит по вине летчика. Очевидно, что именно летчик, как правило, принимает наиболее ответственные решения, причем от правильности его действий, умения своевременно найти и реализовать верное в сложной ситуации решение, зависит не только эффективность выполнения поставленных перед ним задач, но и, в ряде случаев, целостность самого летательного аппарата и безопасность находящихся в нем людей. От повышения эффективности подготовки летного состава зависит дальнейшее повышение эффективности как уже эксплуатируемых, так и вновь разрабатываемых летательных аппаратов. Важным фактором эффективной подготовки летного состава является разработка объективных критериев оценки действий летчика в различных режимах его работы. Это касается его подготовки как на тренажерных комплексах, так и на реальных летательных аппаратах.

Постановка задачи

Легко убедиться, что действия летчика, стабилизирующие заданное программное движение летательного аппарата, могут быть отождествлены с действием некоторой оптимальной замкнутой системой управления. Тогда критерий качества при синтезе такой системы становится идентичным критерию оценки действий летчика при наличии отклонений от программного движения.

С точки зрения получения аналитического решения задачи синтеза таким критерием может быть выбран квадратичный функционал вида[1]:

$$Q = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\Delta\bar{x}^T Q \Delta\bar{x} + \Delta\bar{u}^T R \Delta\bar{u} \right) dt, \tag{1}$$

где Q, R – диагональные матрицы соответственно размерности $n \times n$ и $m \times m$;

$\Delta\bar{x}$ и $\Delta\bar{u}$ – вектор отклонений параметров и управляющих воздействий от эталонных значений.

Задача синтеза критерия оценки действий летчика в режимах стабилизации движения летательного аппарата заключается в нахождении коэффициентов квадратичного функционала (1)

Алгоритм определения коэффициентов квадратичного функционала (1) существенно упрощается, если считать управление скалярной величиной, причем $R = 1$.

Выбор скалярного управляющего воздействия обусловлен тем, что в реальной ситуации в режиме стабилизации летчик, как правило, работает одним органом управления [2, 3].

Решение задачи

Для определения коэффициентов матрицы $Q = \{q_i\}$, $i = \overline{1,n}$ в данной статье предлагается метод модального синтеза.

Пусть динамика летательного аппарата в отклонениях от программного движения определяется уравнением:

$$\Delta\bar{x}(t) = A\Delta\bar{x}(t) + Bu(t), \tag{2}$$

где A – матрица коэффициентов размерности $n \times n$.

Выбранный спектр корней $\{\lambda_i^*\}, i = \overline{1,n},$ реализующий заданные переходные процессы стабилизации эталонного программного движения, обеспечивается путем выбора соответствующей обратной связи, что характерно для квадратичного критерия (1) [3, 4].

$$u = \bar{p}^T \Delta\bar{x}, \tag{3}$$

где $p_T = (p_1, ..., p_n)$ – вектор-строка известных коэффициентов. Подставляя найденный закон управления (3) в исходную систему (2) имеем:

$$\Delta \bar{x}(t) = (A + B\bar{p}^{T})\Delta \bar{x}(t). \quad (4)$$

Как уже указывалось ранее, чтобы производить оценку действий оператора с помощью функционала (1), необходимо отождествить его стабилизирующие программное движение с действием найденной замкнутой оптимальной системой (4), обладающей заданными динамическими свойствами. Иначе говоря, для найденного спектра, корней $\{\lambda_i^*\}, i = \overline{1,n}$ системы (2) необходимо определить коэффициенты функционала (1).

Решение известной задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) для квадратичного критерия вида (1) при сделанных выше допущениях приводит к использованию характеристического определителя расширенной системы [5].

$$H(Q,\lambda) = \det(M - I\lambda) = \begin{bmatrix} A - I\lambda & BB^T \\ Q & -A^T - I\lambda \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Для дальнейших выкладок необходимо доказать следующую теорему.

Теорема. Если матрица Q диагональная, то характеристический определитель $H(Q,\lambda)$ вида (5) является полиномом степени $2n$ коэффициенты которого линейно зависят от $\{q_i\},\ i = \overline{1,n}$.

Доказательство. Для упрощения выкладок, перепишем выражение (5) в следующем виде

$$H(Q,\lambda) = \begin{bmatrix} E & F \\ Q & D \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $E = A - I\lambda$;

$D = -A^T - I\lambda$;

$F = BB^T$.

Если вычесть из второй строки блочной матрицы $H = (Q,\lambda)$ первую, умноженную слева на QE^{-1}, сделав допущение, что $\det \neq 0$, то тогда определитель (6) примет вид:

$$H(Q,\lambda) = \det \begin{bmatrix} E & F \\ 0 & D - QE^{-1}F \end{bmatrix} = \det E \det(D - QE^{-1}F). \quad (7)$$

Полученное соотношение известно, как формула Шура [6]. Если рассмотреть более подробно второй сомножитель, содержащий матрицу Q, то в общем случае он будет иметь вид:

$$\det(D - QE^{-1}F) = \begin{bmatrix} d_{11} - q_1\sum_j E_{1j}b_{j1} & d_{12} - q_1\sum_j E_{2j}b_{j2} & \dots & d_{1n} - q_1\sum_j E_{nj}b_{jn} \\ d_{21} - q_2\sum_j E_{1j}b_{j1} & d_{22} - q_2\sum_j E_{2j}b_{j2} & \dots & d_{2n} - q_2\sum_j E_{nj}b_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} - q_n\sum_j E_{1j}b_{j1} & d_{n2} - q_n\sum_j E_{2j}b_{j2} & \dots & d_{nn} - q_n\sum_j E_{nj}b_{jn} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

где E_{ij} — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы **E**.

Пусть, далее $\forall k\ b_{kk} \neq 0$. Тогда, выполнив известное преобразование Гаусса [6] над элементами определителя, можно привести его к определителю эквивалентному данному, в котором неизвестные коэффициенты $\{q_i\},\ i = \overline{1,n}$ входят только в -й столбец. Учитывая, то обстоятельство, что определитель равен сумме всех элементов произвольной строки (столбца), умноженных на их алгебраические дополнения [6], нетрудно убедиться, что, раскрывая его по элементам -го столбца, q_i будут входить линейно в коэффициенты биквадратного полинома степени. Что и требовалось доказать.

В результате, раскрыв определитель указанным выше способом и группируя члены при соответствующих степенях λ, получается следующее выражение:

$$H(Q,\lambda) = \lambda^{2n} + (\sum_{i=1}^{n} c_{n-1,i}q_i + d_{n-1})\lambda^{2(n-1)} + \dots + (\sum_{i=1}^{n} c_{0,i}q_i + d_0) \quad (9)$$

или

$$H(Q,\lambda) = \lambda^{2n} + (c_{n-1}^T\bar{q} + d_{n-1})\lambda^{2(n-1)} + \dots + (c_0^T\bar{q} + d_0). \quad (10)$$

Определить неизвестные параметры $c_{ij},\ d_j\ \ (j = \overline{0,n-1}; i = \overline{1,n})$ можно при малой размерности вручную, при большой размерности неизвестные параметры $c_{ji},\ d_j\,(j = \overline{0,n-1}; i = \overline{1,n})$ можно определить за n + 1 шаг предложенным авторами в работе [8] методом неопределенных коэффициентов. Для этого на первом шаге, полагая $q_i = 0\ (i = 1,\dots,n)$ в определителе (8) и раскрывая его одним из известных методов [6], находим, что найденные коэффициенты при различных степенях λ, определяют неизвестные коэффициенты $d_j(j = \overline{0,n-1})$ выражения (10) при соответствующих степенях λ. На последующих n шагах, полагая поочередно один из коэффициентов $q_i (i = 1,...,n)$ равным единице при остальных нулевых и раскрывая определитель (8), получаем выражения для неизвестного параметра c_{ij} при соответствующей степени λ в виде

$$c_{ji} = f_j - d_i , \tag{11}$$

где f_j – коэффициент при соответствующей степени λ в -м раскрытом характеристическом определителе.

Известно, что характеристическому определителю (10) соответствует биквадратный полином замкнутой системы с заданным спектром корней $\{\lambda_i^*\}; i = \overline{1,n},$, который можно записать в виде:

$$F(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) \prod_{i=1}^{n} (\lambda + \lambda_i) = \lambda^{2n} + \sum_{i-1}^{n-1} l_i \lambda^{2i}. \tag{12}$$

В результате для определения искомых коэффициентов q_i необходимо решить одним из известных методов [6] систему линейных алгебраических уравнений:

$$\mathrm{col}(\overline{c}_{n-1}^T, \overline{c}_{n-2}^T, ..., \overline{c}_0^T)\overline{q} = \overline{l} - \overline{d}, \tag{13}$$

где $\overline{l} = (l_{n-1}, l_{n-2}, ..., l_0)$; $\overline{d} = (d_{n-1}, d_{n-2}, ..., d_0)$.

Заключение

В данной статье предложен метод модального синтеза квадратичного критерия оценки действий летчика в режимах стабилизации движения летательного аппарата. Синтезированный этим методом критерий оказывается весьма эффективным для оценки действий летчика в указанных режимах, так как позволяет отождествлять его действия с действием замкнутой оптимальной системы, обладающей заданными динамическими свойствами, соответствующими выбранному спектру корней. Данный критерий может в полной мере использоваться и для оценки качества работы автопилотов летательных аппаратов. Однако, в случае большой размерности для определения весовых значений критерия оценки предложен метод неопределенных коэффициентов.

Список использованной литературы

1. *Атанс М.* Оптимальное управление / М. Атанс, П. Фалб. – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
2. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений / Н. Н. Красовский. – М. : Наука, 1987. – 235 с.
3. *Летов А. М.* Динамика полета и управление / А. М. Летов – М. : Наука, 1969.
4. *Красовский А. А.* Справочник по теории автоматического управления / А. А. Красовский – М. : Наука, 1987.
5. *Квакернаак Х.* Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. – М. : Мир, 1977. – 670 с.
6. *Мишин А. П.* Высшая алгебра / А. П. Мишин, И. В. Проскуряков.– М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. –300 с.