УДК 629.7.016

А. А. Стенин, Е. Ю. Мелкумян, М. А. Солдатова

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛУЧЕВОГО НАВЕДЕНИЯ СНАРЯДА

Аннотация. В данной статье синтез оптимальной системы лучевого наведения снаряда осуществляется методом динамического программирования с использованием функции Ляпунова. Реализованное таким образом оптимальное управление обеспечивает устойчивое движение снаряда в равносигнальной зоне наведения.

Ключевые слова: функция Ляпунова, уравнение Риккати, оптимальная система, система лучевого наведения снаряда.

Введение

Лучевым называется такое наведение, при котором используется направленный определенным образом в пространстве луч, в окрестности оси которого снаряд удерживается в течение всего процесса наведения [1]. При лучевом наведении управление осуществляется следующим образом. Снаряд после старта входит в луч и в дальнейшем движется вдоль него, оставаясь все время в равносигнальной зоне. При отклонении от равносигнальной зоны на объекте вырабатывается сигналы ошибки, которые после соответствующего преобразования подаются на исполнительные органы.

Специфической особенностью лучевой системы наведения является ограниченность зоны допустимых отклонений снаряда в соответствии с размерами рабочей зоны луча [2]. Это накладывает жесткие требования на качество процесса управления. При этом наиболее трудно реализуемым является управление в плоскости рыскания (по углу курса). В данной статье рассматривается управление по высоте (по углу тангажа). Несмотря на то, что задача в данном случае сводится к компенсации влияния веса снаряда, решение задачи АКОР (аналитического конструирования оптимальных регуляторов) осложняется тем, что в уравнении Риккати входят коэффициенты, зависящие от высоты и скорости цели.

Постановка задачи

В качестве математической модели используем линеаризованную модель дифференциальных уравнений движения снаряда в окрестности равносигнальной зоны луча в плоскости угла тангажа [3]:

© А. А. Стенин, Е. Ю. Мелкумян, М. А. Солдатова

$$\dot{\bar{x}}=(t)=A\bar{x}(t)+Bu(t). \quad (1)$$

где $\bar{x}=(x_1,x_2)$ – вектор состояния, причем x_1 – линейное отклонение снаряда от оси луча, x_2 – возмущающее ускорение, обусловленное непрерывным поворотом луча в процессе сопровождения цели, $\bar{x}$ – скалярное управление.

В уравнении (1) матрицы коэффициентов имеют вид:

$$A=\begin{bmatrix} a_{21}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ (h_u,\upsilon_u) & 0 \end{pmatrix}\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где a_{21} – коэффициент, зависящий от высоты h_u и скорости цели.

Зададим функционал качества управления в виде:

$$I(u)=\int_0^\infty \left[x(t)^T Qx(t)+u2(t) \right] dt, \quad (2)$$

Где $Q=\{q_{ij}\}$ – диагональная матрица.

Необходимо найти такое управление $u^{opt}(t)$, которое минимизирует функционал (2) и, тем самым, обеспечивает движение снаряда по лучу наведения с минимальным отклонением.

В такой постановке, из-за коэффициента $a_{21}(h_u, \upsilon_u)$ применить стандартную процедуру АКОР невозможно. В этом случае, согласно работе авторов [4], предлагается использовать специально сконструированные функции Ляпунова в сочетании с методом динамического программирования.

Применение метода динамического программирования [5] к системе (1) приводит к следующему функциональному уравнению Беллмана:

$$\min_u \left[F(\bar{x})+u^2 + \frac{\partial V}{(\partial \bar{x})(A\bar{x}+Bu)} \right]=0, \quad (3)$$

где $\upsilon(t)=\min\int_0^\infty \left[F(x)+u^2 \right] dt$ – производящая функция, физический смысл которой раскрыт авторами для задач АКОР в работе [4].

Отсюда, минимум в формуле (3) достигается при условии

$$u^{opt}(t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial \overline{x}}B = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x_1}B. \tag{4}$$

Таким образом, для определения искомого оптимального управления (4) требуется сформировать производящую функцию $\upsilon(x)$, которая удовлетворяет уравнению в частных производных

$$F(x) - \frac{\partial V}{\partial x}Ax - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x}B\right)^2. \tag{5}$$

В рассмотренном случае примем производящую функцию в виде:

$$\upsilon(t) = \min\int_0^\infty \left[q_{11}x_1^2(t) + q_{22}x_2^2(t) + u^2(t)\right]dt. \tag{6}$$

Для определения производящей функции сравним значения $v(t)$ в двух точках, отстоящих на величину Δt. Имеем:

$$\upsilon(t) = \min_u\left[\upsilon(t+\Delta t) + \int_0^{(t+\Delta t)}\left(q_{11}x_1^2(t) + q_{22}x_2^2(t) + u^2(t)\right)dt\right]. \tag{7}$$

С учетом (1) получим

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = q_{11}x_1^2(t) + q_{22}x_2^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1}x_2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2. \tag{8}$$

Исходя из теоремы об асимптотической устойчивости объектов [6], представляем функцию V в виде положительно определенной квадратичной формы вида

$$V = \upsilon_{11}x_1^2 + \upsilon_{12}x_1x_2 + \upsilon_{22}x_2^2. \tag{9}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} = 2\upsilon_{11}x_1 + \upsilon_{12}x_2 \\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2} = 2\upsilon_{12}x_1 + 2\upsilon_{22}x_2 \end{cases} \tag{10}$$

Учитывая, что

 ISSN 1560-8956

$$-\frac{\partial V}{\partial t}=-\frac{\partial \upsilon_{11}}{\partial t}x_1^2-\frac{\partial \upsilon_{12}}{\partial t}x_1x_2-\frac{\partial \upsilon_{22}}{\partial t}x_2^2. \quad (11)$$

Подстановки (10) и (11) в (9) получим

$$-\dot{\upsilon}_{11}x_1^2-\dot{\upsilon}_{12}x_1x_2-\dot{\upsilon}_{22}x_2^2=q_{11}x_1^2+q_{22}x_2^2+(2\upsilon_{11}x_1+\upsilon_{12}x_2)\,x_2-\frac{1}{4}(\upsilon_{12}x_1+2\upsilon_{22}x_2)^2=0. \quad (12)$$

Или т. к. x_1 и x_2 в общем случае не равны нулю, то

$$\begin{cases} \dot{V}_{11}=-q_{11}+\frac{1}{4}\upsilon_{12}^2 \\ \dot{V}_{22}=-q_{22}+\upsilon_{22}^2 \quad , \\ \dot{V}_{12}=-2\upsilon_{11}+\upsilon_{12}\upsilon_{22} \end{cases} \quad (13)$$

т. к. система (1) стационарна во времени, то исходя из теоремы Ляпунова в уравнении (13) следует положить $\dot{\upsilon}_{ij}=0\,(i,j=1,2)$. Отсюда:

$$\begin{cases} \upsilon_{12}^2-4q_{11}=0 \\ \upsilon_{22}^2-q_{22}-\upsilon_{12}=0 \\ \upsilon_{12}^2\upsilon_{22}-2\upsilon_{11}=0 \end{cases} \quad (14)$$

Решая систему (14) получим

$$\upsilon_{12}=4\sqrt{q_{11}};\ \upsilon_{22}=\sqrt{q_{22}+\sqrt[4]{q_{11}}};\ \upsilon_{11}=\sqrt[2]{q_{11}q_{22}+4q_{11}}. \quad (15)$$

С учетом (4), (10) окончательно получим

$$u^{opt}(t)=-\frac{1}{2}(2V_{11}x_1+V_{12}x_2)=-\sqrt[2]{q_{11}q_{22}+4q_{11}x_1}-\sqrt[2]{q_{11}x_2}. \quad (16)$$

Заключение

Следует отметить, что в общем случае, при выборе производящей функции в виде квадратичной формы, задача оптимизации сводится к известной задаче АКОР, которая решается на основе нелинейного уравнения Риккати, решение которого, как правило, можно получить только на основе известных численных процедур [6].

В данной работе через метод динамического программирования с использованием функции Ляпунова было получено точное аналитическое выражение для оптимального уравнения. Соответствующие значения q_{ij} производящей функции можно выбрать из заданных динамических свойств системы управления методом, предложенным авторами в работе [4].

Список использованных источников

1. Кочетков В. Т. Теория систем телеуправления и самонаведения ракет / В. Т. Кочетков, А. М. Половко. – М.: Наука, 1964. – 536 с.
2. Моисеев В. С. Основы теории применения управляемых артиллерийских снарядов / В. С. Моисеев, А. Н. Козар. – Казанское высшее артиллерийское командное училище (военный институт) им. маршала артиллерии М. Н. Чистякова, 2004. – 352 с.
3. Дмитриевский А. А.Внешняя балистика.-М.:Машиностроение, 1979. – 479 с.
4. Стенин А. А. Анализ проблемы синтеза систем управления нелинейными динамическими объектами. / А. А. Стенин, В. П. Пасько, Е. Ю. Мелкумян, М. А. Солдатова // Міжвідомчий науково-технічний збір.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.
6. Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. — Москва: Мир, 1980, 300 с.
7. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці / Л. П. Фельдман, А. І. Петренко, О. А. Дмитрієва. – К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.

 ISSN 1560-8956